И.Н.Власова
(к.пед.наук, доцент,
Пермский государственный педагогический университет)

Комбинаторно-вероятностные задачи в начальном обучении

В федеральных государственных образовательных стандартах одним из метапредметных результатов освоения основной образовательной программы начального общего образования является овладение начальными сведениями о сущности и особенностях объектов, процессов и явлений действительности (природных, социальных, культурных, технических и др.), которые, как правило, носят случайный характер и подчиняются статистическим законам. В свете современных научных концепций случайность является фундаментальным свойством природы и общества. Поэтому система знаний большинства учащихся становится неадекватной их жизненному опыту и эмпирическим наблюдениям явлений и процессов взаимодействующей с ними природы, если отсутствуют представления о случайных событиях. Возникающее несоответствие способствует формализму знаний школьников и усиливает дисгармонию в развитии их личности [2]. Все это актуализирует проблему целенаправленного формирования у учащихся комбинаторно-вероятностного мышления [1]. Знакомство в начальной школе с комбинаторно-вероятностными понятиями имеет следующие особенности:

1) в понимании учащимися случайных процессов присутствует значительная доля бессознательного и интуитивного;
2) способность обучаемых характеризовать их только качественно;
3) необходимость опоры на жизненный опыт младших школьников;
4) длительность формирования соответствующих когнитивных структур внеразрывной связи с приобретаемыми в начальной школе знаниями, умениями и навыками.

Процесс решения комбинаторно-вероятностных задач должен носить продуктивный характер, который, исходя из психологических особенностей младших школьников, определяется соблюдением баланса между логикой и интуицией, словом и наглядным образом, осознанным и подсознательным, догадкой и рассуждением. В процесс выполнения заданий включается и репродуктивная вычислительная деятельность, однако и она сопровождается выявлением определенных зависимостей, связей и закономерностей. Для этого в заданиях специально подбираются математические выражения и высказывания, при анализе которых дети используют математические понятия и свойства, приемы умственных действий. Это способствует формированию таких универсальных действий как регулятивных (планирование, контроль и оценка), познавательных (общеучебных: осознанное и произвольное построение речевого высказывания, выбор эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; логических: установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений, выдвижение гипотез и их основание), коммуникативных (умение слушать и вступать в диалог). Включение в содержание математического образования младшего школьника начальных представлений о комбинаторике и вероятности способствует формированию математической культуры и является пропедевтикой изучения стохастики в основной школе.

Включение вероятностных задач возможно в содержание любой темы школьного курса математики, но они не должны выступать, на наш взгляд, отдельным объектом изучения. Такие задачи учитель может составлять самостоятельно в зависимости от изучаемой темы и уровня подготовки учащихся. Поэтому предлагаемые ниже задания не содержат указания, в каком классе их надо решать. Учитель сам может определить место решения вероятностных задач. В качестве общей рекомендации можно сказать следующее: задания первого уровня можно использовать во втором классе, второго – в третьем и третьего в четвертом. Однако опыт работы с учащимися начальной школы показывает возможность решения задач первого и второго уровня уже в первых классах, если учащиеся имеют уровень подготовки выше среднего (в гимназиях, лицеях). Методические рекомендации, приведенные после серии задач, помогут эффективной организации учебной деятельности школьников. Предлагаемые комбинаторно-вероятностные задачи можно включать в уроки по любой программе обучения математике для начальной школы. Так на уроках нового знания такие упражнения можно предложить на этапе актуализации знаний или создания мотивации, а также этапе включения нового понятия, свойства или правила в систему знаний. На уроках решения задач, тренингах вероятностные задачи, предложенные в игровой форме, способствуют переключению внимания и не утомляют детей. На уроках обобщения и систематизации знаний такие упражнения не позволяют сформировать стереотипность формулировок математических задач, а также способствуют расширению кругозора учащихся и развитию интереса к математике. Во внеурочной деятельности (математический кружок, конкурс, викторина, олимпиада и т.п.) решение комбинаторно-вероятностных задач, проведение опытов, экспериментов с определением возможных исходов позволяет учащемуся быть активным субъектом учебной деятельности, быть исследователем или его оппонентом.

Среди всех задач по теории вероятностей можно условно выделить четыре основных типа, знакомство с которыми возможно уже в младших классах [3]. *Первый тип заданий – на классификацию событий*, в ходе решения которых дети учатся вначале узнавать (различать) невозможные и достоверные события на основе их собственного опыта и знаний по учебным предметам (Например, может ли ваша мама быть старше вашей бабушки, или после зимы начнется осень). Далее учащиеся из предложенных событий выделяют те, о которых невозможно точно сказать «произойдет оно или нет» (например, вода в стакане замерзла или два отрезка имеют общую точку), то есть случайные события. Как только учащиеся самостоятельно классифицируют предложенные события и могут приводить примеры таких событий, можно начинать разговор об исходах в испытаниях. Причем формирование комбинаторно-вероятностных представлений детей младшего школьного возраста должно опираться на предметно-чувственную деятельность, в процессе которой легче приобрести навыки рационального перебора вариантов исходов при испытании, запись вариантов и подсчет их числа (Например, какие осадки могут выпасть 1 октября на Урале, а какие – на Севере? Какими могут быть слагаемые, если сумма равна 9?). Поэтому такого типа задания целесообразно представлять в виде проблемных жизненных вопросов или игровых ситуаций, которые требуют либо деятельности учащихся, либо содержательных рассуждений (так, мама собирается в командировку на Север. Какая должна быть одежда на маме, чтобы она не замерзла? В этом случае необходимо обсудить возможные осадки в октябре на Урале (там мама живет) и на Севере (куда мама поедет), опираясь на знания климатических особенностей (или собственный опыт), а также место расположения этих регионов; в случае со слагаемыми предложить детям отгадать, какие числа загадал Буратино, если их сумма равна 9, или какие места заняли Волк и Лиса в лесных соревнованиях, если в сумме они составляют 9). Только после того как будут освоены *задачи второго типа - об исходах в испытаниях*, можно приступать к решению задач на сравнение вероятности появления события (например, какая из цифр 1 или 2 чаще встречается при записи чисел от 10 до 20, а от 20 до 30?).

Конечно, решая *задачи третьего типа* - сравнение вероятности появления события, нельзя забывать о задачах первого и второго типа, которые к этому времени обучения детьми успешно распознаются и решаются, несмотря на расширение и углубление содержания (например, при каких условиях следующие события будут достоверными: сумма трех слагаемых будет кратна 2; разность двух чисел – нечетна; утром будет густой туман; столбик термометра поднимется на несколько делений). Формирование у детей умения использовать приобретенные знания в новых бытовых условиях следует рассматривать в качестве специальной цели обучения.

Задачи четвертого вида – на определение вероятности события (относительной частоты события) могут изучаться только при осознанном решении задач первых трех типов. Для решения этих задач требуются не формальное знание о возможных исходах и частоте появления случайного события, необходимо понимание (применение в нестандарных ситуациях) учащимися приемов проведения «статистических исследований» (например, в тексте из ста слов чаще встречается буква а или у? Как часто встречается буква ю?). Поэтому задачи четвертого типа имеют знак *, обозначающий задачи повышенной сложности, необязательные для решения всеми учащимися.

Далее представлены примеры задач по теории вероятностей для учащихся начальной школы в четырех блоках в соответствии с типом задачи. Каждый блок содержит три уровня задач, которые отличаются по степени сложности. Та или иная степень сложности приписывается задаче в зависимости от ее решения. К первому – минимальному уровню – относятся задания, целью которых является усвоение простейших понятий комбинаторики и теории вероятностей (задания на распознавание и построение объекта с заданными свойствами). Ко второму – общему уровню относятся задания на сопоставление, классификацию, сравнение. Третий – продвинутый уровень – содержит упражнения, требующие синтеза знаний из разных разделов курса математики и теории вероятностей, включающие комбинации разных типов задач по комбинаторике и теории вероятностей.

Первый тип – задачи на классификацию событий

1 уровень

№ 1. Мальвина на уроке чистописания попросила Буратино придумать несколько предложений о том, что он видит вокруг. Когда Буратино выполнил задание, девочка посмотрела и вскрикнула: «О, ужас! Буратино, но ведь это неправда, такое вообще не может произойти!» Прочитайте и вы предложения Буратино и попробуйте объяснить, о каких из них Мальвина говорила, что это неправда.

А – На большой яблоне выросли красные яблоки.

Б – На крыше сидели пиявки и весело свистели.

В – На дереве выросли золотые монетки.

Г – Пес Артемон после обеда чистил клювом свои пёрышки.

Д – Черепаха Тортилла живет на болоте.

Ж – Кот Базилио скушал на обед книгу «Азбука».

Рекомендации: с ребятами необходимо обсудить события. Так, событие *А* может произойти, потому что на некоторых сортах яблонь растут красные яблоки. События *Б, В, Г, Ж* не могут происходить, так как содержат в себе невозможное – свист пиявок, рост золотых монеток, клюв и пёрышки у собаки, поедание котом бумаги.

№ 2. Определи для каждого события, какое оно – достоверное или невозможное:

А – в левой руке 2 яблока, а в правой – 3 яблока, то всего в руках 5 яблок;

Б – собрали 4 корзины груш и 2 из них уже унесли в сарай, то осталась половина заполненных корзин;

В – в классе 9 мальчиков и 8 девочек, значит в классе 20 детей;

Г – за партами сидит 23 ученика. Учитель насчитал 11 мальчиков и 9 девочек;

Д – прошел один месяц летних каникул, осталось отдыхать ученикам еще столько же;

Е – на пальто израсходовали 3 м ткани из купленных 5 м, значит можно сшить еще такое же пальто.

Рекомендации: при знакомстве с составом числа можно составлять для учащихся подобные задачи, повторяя материал через нестандартные задания.

2 уровень

№ 3. При каких условиях следующие события будут достоверными: идет урок, капает с крыш вода, заходит солнце, дерево растет, река впадает в море, чашка разбилась; рыбак поймал несколько щук.

Рекомендации: важно, чтобы учащиеся увидели, что достоверность или невозможность некоторых событий зависит от условий. Выделение этих условий приучает детей более внимательно относиться к тексту задачи.

№ 4. Определи, какие из следующих событий являются невозможными:

А – при покупке блокнота за 5 руб. и ручки за 3 руб. уплатили 800 копеек;

Б – из десятилитрового бидона отлили 3 л молока, то в бидоне осталось меньше половины;

В – от 5 килограммового кочана капусты отрезали половину, то оставшаяся часть весит 1 кг;

Г – из шести учебных дней уже прошли суббота, воскресенье, понедельник;

Д – если каждый учебник весит 330 г, а тетрадь 40 г, то портфель с тремя учебниками и четырьмя тетрадями весит меньше килограмма;

Е – у Ольги имеются монеты: две по 2 руб., одна по 50 коп. и две по 10 коп. Сможет ли она оплатить проезд в автобусе, если стоимость билета 5 руб.?

Рекомендации: данное задание целесообразно использовать при повторении материала по теме «Величины».

№ 5. Вставьте слова «случайно», «постоянно» в предложения, так чтобы они были верными:

Снег весной тает…

Звезды на небе находятся …

Подарки на День рождения мне дарят …

Экскурсии в нашем классе проходят …

3 уровень

№ 6. Какие из следующих событий достоверные, невозможные, а какие случайные: периметр прямоугольника является нечетным числом; при бросании двух игральных кубиков выпало нечетное число, меньшее 1; при делении натурального числа на 7 получается остаток 9; площадь квадрата выражена четным числом; периметр треугольника равен нечетному числу; при делении числа на 5 получается 15; при делении числа на 5 получается остаток 10.

Рекомендации: при определении вида первого события у учащихся мнения могут быть различными. Если длины сторон выражены целым числом сантиметров, то периметр – четное число, и событие является невозможным. Если длины сторон выражены в сантиметрах и миллиметрах, то и результат будет содержать целое число сантиметров (может быть, нечетное) и миллиметров (обязательно четное). Сразу все дети не смогут определить, какое это число – четное или нечетное, попросите их выразить результат в одной единице измерения. Например, стороны прямоугольника 3см 4 мм и 2см 3 мм, тогда периметр 11 см 4 мм необходимо представить как 114 мм, а число 114 – четное, т.е. событие является невозможным. Если учащиеся знакомы с формулой четного числа a=2n, то по формуле периметра прямоугольника *P=2(a+b)* можно сделать вывод о невозможности быть нечетным числом.

№ 7. Компьютер переставляет случайным образом цифры 2, 4, 9 и выдает на экран полученное трехзначное число. Рассмотри такие события: а) это число четное; б) это число кратно трем; в) это число кратно четырем; г) это число кратно 10. Найди среди этих событий невозможное и достоверное. Объясни свое решение.

Второй тип - задачи на определение исхода в испытании

1 уровень

№ 8. Если ваш друг загадал число от 1 до 10, то каким оно может быть?

Рекомендации: важно обсудить то, что точный ответ дать на такой вопрос нельзя, но различных вариантов правильного ответа существует 10. Их нужно назвать. Это задание можно использовать при изучении темы «Первый десяток» (назвать последовательно все правильные варианты). На первых уроках можно числа не записывать, а только называть (устный счет). Можно изменять условие в этой задаче: ваш друг задумал число, которое меньше 10; друг задумал число от 3 до 6; друг задумал однозначное число).

№ 9. Мама постряпала пельмени и сделала один «счастливый» - с тестом. За обедом их ели папа, мама, брат с сестрой и кот Василий. Кому мог достаться «счастливый» пельмень, если все они были съедены?

2 уровень

№ 10. На столе лежат 33 карточки со всеми буквами алфавита. Сможет ли учащийся составить из них следующие слова: Пермь, Кунгур, Сылва, Оса, Добрянка, Чайковский, Березники? Названия каких городов Пермской области сможет еще составить учащийся? А городов России?

№ 11. Расстояние между селом Красное и Сосновка 10 км, а между селом Красное и Березовка 15 км. Каким может быть расстояние между селами Сосновка и Березовка?

(*Решение*: если они расположены на одной дороге, то возможно два варианта К-С-Б (тогда 5 км) или Б-К-С (тогда 25 км); если не на одной дороге, то рассматривается треугольник с вершинами КСБ, тогда длина стороны СБ не может быть меньше 5 км и больше 25 км (иначе треугольник не построить)).

3 уровень

№ 12. В уральских лесах из каждых 100 деревьев 60 хвойных, 40 лиственных. Если наугад выбирается два дерева, то какими они могут быть? Если наугад выбирается 10 деревьев, то какими они могут быть? Могут ли среди выбранных деревьев оказаться только хвойные? Только лиственные? Только березы? Только ели? Только смородина?

№ 13. В мешке находятся бочонки для игры «Лото» (от 1 до 90). Не глядя достаётся один бочонок. Сколько различных исходов может быть, если: число кратно 5; число кратно 2; число кратно 3; число кратно 7.

(Решение: бочонков с номером кратным 5 – 18 (в каждом десятке по два, всего девять десятков); кратным 2 – 45, кратным 3 – 30 (каждое третье число кратно 3), кратным 7 – 12).

III тип - задачи на сравнение вероятности появления события

1 уровень

№ 14. Определите, какое событие «более вероятно», а какое «менее вероятно».

1) *А* – зимой идет сильный дождь. *Б* – зимой падает снег.

2) *В* – на уроке чтения дети решали математические задачи. *Д* – на уроке математики дети писали диктант.

3) *В* – если подбросить монетку, то выпадет «орел». *Г* – если бросить игральный кубик, то выпадет «шестерка».

Рекомендации: можно использовать выражения, близкие по смыслу: «скорее произойдет, чем не произойдет», «происходит чаще», «происходит реже».

№ 15. Играют два ученика. У каждого карточки с числами от 1 до 10. Одновременно не глядя вынимается по одной карточке и кладется на стол числом вверх. Если сумма чисел четная, то выигрывает первый ученик, если сумма чисел нечетная, то – второй. У кого больше шансов выиграть эту игру?

2 уровень

№ 16. Сделайте 10 бросаний кубика для игр и понаблюдайте, какое событие происходит при этом чаще:

1) выпадает число 3, или выпадает число 2;
2) выпадает 5 или выпадает 6;
3) выпадают числа 1, 2 или выпадает 6;
4) выпадают числа 1, 3, 6 или выпадают числа 2, 4, 6.

А теперь, не бросая кубик, попытайся определить, какое событие происходит чаще, и объясните, почему так:

5) выпадает число 5 или число 6;
6) выпадают числа 1, 2, или выпадают числа 5, 6.

Можно ли сказать, что эти события встречаются одинаково часто?

Сейчас представьте, что на кубике нарисованы числа 1, 1, 4, 4, 5, 6, и попытайтесь определить, какое событие более вероятно, а какое – менее вероятно (можно сделать такой кубик и поэкспериментировать):

7) выпадает число 1 или выпадает 6;
8) выпадает число 4 или число 1;
9) выпадают числа 1, 4, или выпадают числа 5, 6.

№ 17. Выберите любой текст (но каждый пусть выберет свой текст), состоящий из 100 знаков, и определите, какие буквы встречаются чаще: гласные или согласные? Результаты подсчета оформите в таблицу

Имя участника…….

Число гласных…….

Число согласных….

№ 18. Проведите подсчет гласных букв в тексте из 200 знаков и определите, что вероятнее, «встретить в тексте букву *а*», или «встретить в тексте букву *е*». Какая буква встречается чаще, а какая – реже всех остальных?

3 уровень

№ 19. Подбрасываются два игральных кубика. Какое событие более вероятно:

1) *А* – сумма выпавших очков равна двум. *Б* – эта сумма равна трем?

2) *В* – сумма выпавших очков равна 6. *Г* – сумма выпавших очков равна 9.

3) *С* – сумма выпавших очков четная. *Д* – сумма выпавших очков кратна 4.

4) *А* – разность очков первого и второго кубика равна натуральному числу. *Б* – разность очков первого и второго кубика найти нельзя.

5) *Г* – одно из выпавших чисел является делителем другого. *Е* – сумма выпавших чисел имеет только два делителя.

IV тип – задачи на определение вероятности события

1 уровень

№ 20. В вазе 1 красное яблоко и 3 зеленых. Представь, что ты не глядя берешь одно яблоко. Какое событие более вероятно:

а) у тебя красное яблоко; б) у тебя зеленое яблоко?

Во сколько раз одно из этих событий вероятнее другого?

Каким числом ты бы предложил обозначить вероятность того, что у тебя в руках красное яблоко? Зеленое яблоко? Почему?

(Сравни свои рассуждения с таким. Всего в вазе 4 яблока, значит, одно из них можно выбрать четырьмя способами. Среди яблок одно красное, поэтому событие «выбрано красное яблоко» происходит в одном из четырех случаев. Следовательно, вероятность того, что выбрано красное яблоко, логично считать равной $\frac{1}{4}$.)

№ 21. Набирая твой номер телефона, учительница забыла одну цифру и набрала ее наугад. Найдите вероятность того, что она дозвонится до тебя с первого раза? А со второго раза?

2 уровень

№ 22. У вас в классе 25 человек, то какова вероятность того, что ты в беге займешь первое место? А пятое место? А двадцать пятое место?

№ 23. В классе 8 мальчиков и 16 девочек. Что вероятнее: под первым номером в классном журнале записан мальчик или под первым номером записана девочка? Во сколько раз одно из этих событий вероятнее другого?

3 уровень

№ 24. На трех карточках написаны буквы «у», «к», «ж». После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «жук»?

(*Решение*: всевозможных перестановок этих букв может быть 6, а слово «жук» встретится среди них только один раз. Поэтому вероятность получения этого слова равна 1/6.)

№ 25. Вы соревнуетесь в беге вокруг школы с равным по силе партнером. Чего следует больше ожидать: двух побед из четырех забегов или 3 побед из четырех забегов?

Использованная литература

1. *Атаханов Р.* Математическое мышление и методики определения уровня его развития /Под науч.ред.*В.В.Давыдова*. М., Рига, 2000.
2. *Булычев В.А*. Вероятность вокруг нас и в школьном учебнике математики // Газета «Математика». 1997. № 48.
3. *Лебедева И.П.* Развитие комбинаторно-вероятностного мышления младших школьников на уроках математики: учебное пособие /И.П.Лебедева, И.Н.Власова, И.В.Косолапова; Перм.гос.пед.ун-т. – Пермь, 2006. – 85с.

Данные об авторе:

Власова Ирина Николаевна – доцент кафедры методики преподавания математики Пермского государственного педагогического университета

Раб.тел.(342) – 212-75-73, сот. 89082730090

Эл.адрес:vlasova@pspu.ru