ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный педагогический университет»

Г.Н. Васильева

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Монография

Пермь
ПГПУ
2009

УДК 51 (072.3)
ББК Ч 426.24/29
В 191

Р е ц е н з е н т ы :
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике Томского государственного педагогического университета *Э. Г. Гельфман;*
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Тольяттинского государственного университета *Р. А. Утеева*

Автор: канд. пед. наук, доцент ПГПУ *Г. Н. Васильева*

В 191	**Васильева, Г. Н.** Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе: практико-ориентированная монография / Г. Н. Васильева; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2009. – 136 с. **ISBN 978-5-85218-415-3**

В монографии раскрываются теоретико-методологические и методические аспекты проблемы осуществления деятельностного подхода при обучении математике в средней школе, выделяются основные виды деятельности учащихся в обучении математике, описывается структура деятельностей по введению понятий, доказательству утверждений, процесса решения задач.

Особое внимание уделено исследованию предмета познавательной деятельности при изучении математики — научного знания, его двух сторон: логико-операционной и содержательной, а также применению принципа единства деятельности в методических разработках конкретных примеров действий и операций. Анализ логико-операционной стороны научного знания способствовал выделению и описанию структурных компонентов основных видов деятельности учащихся при обучении математике, а также уточнению сущности содержательной стороны научного знания. На основе этого выполнена разработка технологии осуществления деятельностного подхода в подготовке и проведении уроков математики.

Материалы монографии могут быть использованы в качестве основы при изучении психолого-педагогических аспектов курсов «Теория и методика обучения математики», «Технологии и методики обучения», «Современные образовательные технологии». Книга адресована преподавателям и студентам высших педагогических учебных заведений, а также учителям математики средних общеобразовательных школ и преподавателей колледжей.

УДК 51 (072.3)
ББК Ч 426.24/29

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пермского государственного педагогического университета

ISBN 978-5-85218-415-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..6

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ.....11

1.1. Описание сущности понятия «деятельность»....................................11

1.2. Характеристика структурных компонентов деятельности 13

1.2.1. Структура категории «деятельность» 13

1.2.2. Потребность как побудительный фактор деятельности 17

1.2.3. Мотив деятельности и его виды..18

1.2.4. Цели и действия 22

1.2.5. Операции достижения цели...25

1.2.6. Предмет деятельности 27

ГЛАВА 2. ДИДАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ 32

2.1. Научное знание как предмет познавательной деятельности ученика ……………………………………………………………………..32

2.2. Принцип единства внутренней и внешней деятельности в обучении школьников 40

ГЛАВА 3.МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ....................49

3.1. Понятие как категория логики..49

3.1.1. Содержание и объем понятия, определение.......................................49

3.1.2. Логические действия над понятием 56

3.1.3. Понятие «уравнение» с логической точки зрения..............................59

3.2. Теорема как вид суждения. Виды теорем..64

ГЛАВА 4. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ 71

4.1. Сущность деятельностного подхода в обучении математике 71

4.2. Деятельность по введению математических понятий 74
4.2.1. Структура деятельности «введение понятия» *78*
4.2.2. Структура действий деятельности «введение понятия» *84*
4.3. Деятельность по изучению утверждений 90
4.3.1. Структура деятельности «изучение утверждений» *90*
4.3.2. Структура действий деятельности «изучение утверждений» *96*
4.4. Процесс решения задачи как вид деятельности учащихся 99
4.4.1. Роль и функции задач в обучении математике *99*
4.4.2. Структура процесса решения задач *101*
4.4.3. Деятельностный подход при обучении решению задач методом уравнений *116*
4.4.4. Локальная система задач как средство реализации деятельностного подхода в обучении математике *121*
ЗАКЛЮЧЕНИЕ **126**
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ **128**

ВВЕДЕНИЕ

Три стадии признания научной истины:
первая — «это абсурд», вторая — «в этом
что-то есть», третья — «это общеизвестно».
Эрнест Резерфорд

В современной педагогической литературе вопросу реализации деятельностного подхода в обучении математике уделяется немало внимания. Одна из главных причин этого давно и очень точно подмечена К.А. Абульхановой-Славской: «В деятельности изменяется не только сам объект, но и отношение субъекта к объекту. Это означает, что сама деятельность носит динамический характер: жизненные позиции субъекта (отношения, мотивации и т.д.) к объекту меняются в соответствии с ходом деятельности. В этом смысле деятельность является открытой системой для формирования личности» [1, с. 230]. Именно поэтому деятельностный подход является неотъемлемой частью, теоретической основой каждой системы развивающего обучения.

Другая причина — в современном требовании к обучению, заложенном в образовательных стандартах, — формирование компетентности учащихся. Компетентность – «уже состоявшееся личностное качество (совокупность качеств) ученика и минимальный опыт деятельности в заданной сфере» [141, с. 112], т.е. владение, обладание учеником соответствующей компетенцией, включающее его личностное отношение к ней и к предмету деятельности. Компетенции относятся к деятельности субъекта, а компетентность характеризует субъекта деятельности.

Одним из основополагающих принципов конструирования содержания образования 12-летней школы является усиление «деятельностного компонента, представляющего собой основные виды и способы учебной деятельности, сопряженные с изучаемыми образовательными областями, отдельными предметами, их разделами и темами» [54, с. 10].

В.И. Загвязинский, рассматривая наиболее общие и значимые идеи и подходы современной дидактики, ставит личностный и деятельностный подходы на первое место. Суть деятельностного подхода в обучении состоит в направленности «всех педагогических мер на организацию интенсивной, постоянно усложняющейся деятельности, ибо только через собственную деятельность человек усваивает науку и культуру, способы познания и преобразования мира, формирует и совершенствует личностные качества» [43, с. 8].

Внедрение деятельностного подхода в обучение математике реализуется по-разному. Причем эти реализации принципиально различны. Так, система обучения, разработанная В.В. Давыдовым для начальной школы, основана на коренном изменении содержания обучения и формировании на этом содержании учебной деятельности младших школьников. Компонентами *учебной деятельности* являются: учебная задача (ее постановка и решение учащимися), общие учебные действия, посредством которых происходит решение учебной задачи. В.В. Давыдовым они перечислены следующим образом:

– «преобразование ситуации для обнаружения всеобщего отношения рассматриваемой системы;

– моделирование выделенного отношения в предметной, графической и знаковой форме;

– преобразование модели отношения для изучения его свойств в чистом виде;

– выделение и построение серии конкретно-частных задач, решаемых общим способом;

– контроль выполнения предыдущих действий;

– оценка усвоения общего способа как результата решения данной учебной задачи» [33, с. 15].

Формирование учебной деятельности младших школьников ориентировано на подготовку учащихся к овладению знаниями основ наук в средних и старших классах. Имеющиеся материалы для обучения математике в 5–7-х классах, на наш взгляд, слабо учитывают достижения современной методической науки и практики обучения математике в школе, которая активно развивается в последние десятилетия под воздействием педагогической психологии.

Так, понятие функции — абстракция высочайшего уровня — не может быть исходным в построении систематического курса алгебры в седьмом классе. Отказ от положительного, проверенного временем традиционного содержания, не всегда приводит к положительным результатам. Опыт реформирования содержания школьного математического образования в 70-х годах прошлого столетия научил многому. Понятие функции в современных учебниках, реализующих деятельностный подход, на пропедевтическом уровне вводится в конце седьмого класса, а определяется только в восьмом классе [80].

Положения теории учебной деятельности (В.В. Давыдов, Д.Б. Эльконин) широко используются в современных исследованиях обучения школьников, являясь центральным ядром в теориях развивающего обучения [29, 48, 146 и др.]. Так, к ведущим принципам технологии модульного обучения относятся структуризация содержания обучения на обособленные элементы, деятельностный подход и другие [133].

В методике обучения математике в средней школе, отмечает Г.И. Саранцев, деятельностный подход «применяется в разных смыслах: 1) как составляющая методологической основы методики обучения математике; 2) как обучение способам деятельности; 3) как обучение различным действиям, адекватным содержанию обучения математике; 4) как учебная деятельность» [113, с. 17].

Если рассматривать применение деятельностного подхода в учебном процессе как составляющую методологии методики изучения математики, то это предполагает конструирование процедуры обучения математике (деятельности), *адекватной* изучаемому объекту или явлению. Это означает, что методика изучения математических понятий, включающая в себя введение нового понятия, ознакомление с его свойствами (аксиомами, постулатами, теоремами) и применение всей совокупности изученных существенных свойств нового понятия в решении задач, должна разрабатываться согласно структуре деятельности (по А.Н. Леонтьеву). На современном этапе развития методической науки об обучении математике в средней школе это положение не реализуется полностью.

В методике преподавания математики признано, что «деятельностная концепция знаний продвигает решение проблемы формирования понятий, обучения доказательству и решению задач» [113, с. 13]. При этом в изложении вопросов методики введения понятий, изучения теорем и обучения школьников решению задач деятельностный подход реализуется чаще неявно или не в полном объеме [20, 37, 38, 40, 41, 76, 113 и др.]. Это противоречие послужило предметом дальнейшего исследования проблемы реализации деятельностного подхода в методике обучения математике и практике обучения школьников.

Цель данной работы — теоретическое обоснование осуществления деятельностного подхода в процессе обучения математике с позиций более полной реализации в нем структуры понятия «деятельность» и описание технологии деятельностного обучения математике в средней школе. Результатом достижения этой цели является решение следующих задач:

– описание структуры категории «деятельность» с использованием материалов методического исследовании по обучению математике учащихся средней школы;

– разработка технологии обучения математике на основе интеграции в учебный процесс результатов, полученных в ходе изучения *предмета* математической деятельности учащихся средней школы;

– выделение основных видов деятельности учащихся при обучении математике и разработка методики их формирования у учащихся средней общеобразовательной школы.

Научная новизна и практическое значение исследования заключается в осуществлении деятельностного подхода при изложении главных вопросов общей методики преподавания математики — методики введения понятий, изучения теорем и обучения решению задач. На основе этого становится реальностью *технология деятельностного* введения математических понятий, обучения учащихся доказательству теорем и решению задач. Технология деятельностного обучения позволяет решить задачу формирования теоретического мышления [31] при изучении математики в основной школе.

Для понимания сущности технологии деятельностного обучения математике в монографии изложены основные положения психологической теории деятельности, которые являются исходными для любого современного дидактического и методического исследования. Это принципы приоритета *предмета* познавательной деятельности и *единства* деятельности (внутренней и внешней). На основе изучения предмета познавательной деятельности учащихся при обучении математике — научного знания, его двух сторон (логико-операционной и содержательной), выполнен критический анализ изложения вопросов теории и методики изучения понятий и теорем в учебных пособиях для студентов и учебников для учащихся средней школы. Результаты этого исследования, а также применение принципа единства деятельности использованы в методической разработке конкретных примеров действий и операций.

Анализ логико-операционной стороны научного знания способствовал выделению и описанию структурных компонентов основных видов деятельности учащихся при обучении математике. На основе этого выполнена разработка технологии осуществления деятельностного подхода в подготовке и проведении уроков математики. Завершает четвертую главу монографии вопрос о локальной системе задач как средстве осуществления деятельностного подхода к обучению математике. Выделенные требования к локальной системе задач были разработаны автором в диссертационном исследовании на соискание степени кандидата педагогических наук, выполненном на кафедре методики преподавания математики Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина под руководством доктора педагогических наук, профессора кафедры Вячеслава Иосифовича Крупича.

Светлая память глубокоуважаемому Учителю.

ГЛАВА 1. ПСИХОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1. Описание сущности понятия «деятельность»

Как известно, цели и задачи образования состоят в единстве обучения и воспитания школьников, формировании знаний как убеждений, привития умения самостоятельно ориентироваться в знаниях и применять их на практике. «Речь идёт именно о **деятельности** ученика, усваивающего такие знания, которые обеспечивают ему умственное развитие» [33, с. 10]. Как отмечают психологи, введение этой категории во всей ее полноте существенно изменило понятийный строй психологического знания, поставило ряд теоретических проблем. Возникновение концепции деятельностного подхода применительно к процессу обучения обязано исследованию методологических проблем психологической науки в связи с «потребностью в теоретических ориентирах, без которых конкретные исследования неизбежно остаются близорукими» [64, с. 94]. Теория деятельности А.Н. Леонтьева является результатом *системного* исследования деятельности, сознания и личности, направленного на создание науки о порождении, функционировании и структуре психического отражения реальности в процессе деятельности индивидов. Именно системный анализ указанных категорий, выполненный в рамках педагогической психологии, приводит к практически значимым выводам.

Таким образом, если ставится задача развития личности в процессе обучения, в частности математике, то этот процесс должен быть деятельностью в истинном смысле этого слова. Не всякий процесс осуществления «отношения человека к миру» [63, с. 518] называет А.Н. Леонтьев деятельностью. «Не всякая учебная деятельность, а только целенаправленно формируемая и осуществляемая при постоянном активном участии в ней самого ученика как субъекта этой деятельности оказывает влияние на психическое (умственное и нравственное) развитие школьника» [69, с. 27].

Основы психологической теории деятельности разработаны Б.Г. Ананьевым, Л.С. Выготским, А.В. Запорожцем, Э.В. Ильенковым, А.Н. Леонтьевым, А.Р. Лурия, С.Л. Рубинштейном и др. Содержание понятия «деятельность» наиболее глубоко раскрыто А.Н. Леонтьевым [64] и С.Л. Рубинштейном [112]. Дальнейшее развитие учение получило в работах П.Я Гальперина [28], Н.Ф. Талызиной, а в современной интерпретации — в трудах В.В. Давыдова и его последователей [39]. Применение разработанной теории деятельности к процессу обучения реализовано В.В. Давыдовым, Д.Б. Элькониным, А.К. Марковой, Г.И. Щукиной [31, 33, 69, 70, 147, 148, 149 и др.] в работах по формированию учебной деятельности младших школьников (70 – 90 гг. XX века).

Деятельность понимается как форма проявления активного отношения человека к окружающей действительности, содержанием которой является её преобразование. Она «всегда включена в конкретные общественные отношения и определяется условиями материального и духовного общения, характерными для данного общества» [33, с. 10]. Деятельность рассматривается как психологическая категория, «как единица жизни, опосредованная психическим отражением, реальная функция которой состоит в том, что она ориентирует человека в предметном мире» [64, с. 141].

В социальном плане представлен целый спектр деятельности: говорят о производственно-экономической деятельности, научно-познавательной, художественно-эстетической, просветительной, спортивной, игровой. С другой стороны, понятие «деятельность» делят на практическую и теоретическую согласно характеру получаемого результата. Общую природу человеческой деятельности психологи понимают следующим образом. Человеческая деятельность отвечает его потребностям, она мотивирована и управляется психическим отражением наличных объективных условий и представлением будущего, в частности – представлением о том результате, на достижение которого она направлена, т.е. сознательной целью. Она имеет, наконец, свою эффективную регуляцию, непосредственно выражающую её пристрастность; это деятельность утверждающего свою жизнь целостного субъекта [31].

«Формирование учебной деятельности есть процесс постепенной передачи выполнения отдельных элементов этой деятельности самому ученику для самостоятельного осуществления без вмешательства учителя» [150, с. 53].

1.2. Характеристика структурных компонентов деятельности

1.2.1. Структура категории «деятельность»

Деятельность есть «система, имеющая строение, свои внутренние переходы и превращения, свое развитие»[64, с. 141]. Содержание понятия «деятельность» раскрывается А.Н. Леонтьевым посредством категорий мотивационно-ориентировочного и процессуального циклов структуры. Мотивационно-ориентировочный аспект деятельности составляют потребности, мотив, цель и условия, а процессуальный — действие, операции [31]. «Подобно тому, как понятие мотива соотносится с понятием деятельности, понятие цели соотносится с понятием действия» [64, с. 153]. Структуру понятия деятельность, описание компонентов которой приведено ниже, можно представить в виде схемы – структуры (рис. 1).

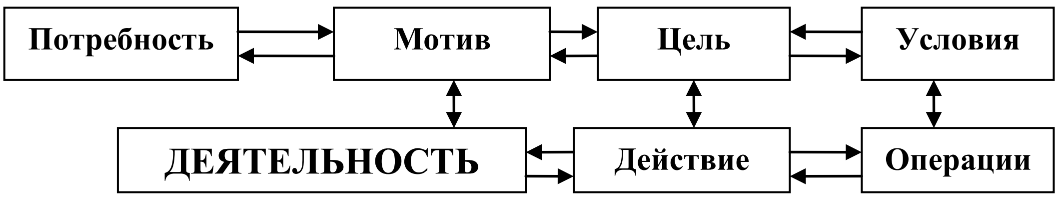


Рис. 1

Всякая **деятельность** состоит из ***действий*** (поступков), основанных на тех или иных **побуждениях.** Поэтому потребность может выступать «как внутреннее условие, как одна из предпосылок деятельности. С другой стороны, потребность выступает фактором, который направляет и регулирует конкретную деятельность субъекта в предметной среде» [Там же, с. 144]. В первом случае потребность выступает как состояние нужды организма и сама по себе не может вызвать никакой определённо направленной деятельности. Её функция ограничивается возбуждением двигательной сферы, которое проявляется в ненаправленных поисковых движениях. Например, потребность может быть физиологической. Человек нуждается в пище, воде. Однако для удовлетворения потребности в пище он должен выполнять действия, которые непосредственно на овладение пищей не направлены.

Целостность деятельности выступает как единство целей, на которые она направлена, и мотивов, из которых она исходит. При этом мотивы и цели деятельности, в отличие от мотивов и целей отдельных действий, носят обобщённый характер, выражая общую направленность личности.

В самом начале школьной жизни у ребёнка ещё нет потребности в теоретических знаниях как психологической основе учебной деятельности. Эта потребность возникает в процессе усвоения им элементарных теоретических знаний при совместном с учителем выполнении простейших учебных действий, направленных на решение соответствующих учебных задач [31].

Существуют своеобразные отношения между потребностями, мотивом, действиями, операциями. Мотив деятельности может переходить в цель действия (на рисунке показано стрелочкой), тогда деятельность обращается в действие. Или, наоборот, сдвиг цели действия на мотив трансформирует действие, которое может развернуться в деятельность, имеющую теперь самостоятельный мотив (сознательный мотив) [63]. В таких взаимопереходах рождаются новые деятельности, происходит переход от одной стадии деятельности к другой. Подобным взаимопереходам обязано и становление мотивации познавательной деятельности. Это важнейшее положение деятельностной теории учения многократно иллюстрируется примерами, приведенными в третьей главе данной работы. Действие классификации понятия, входящее в деятельность «введения понятия» (с. 78), раскрывает перед учащимися перспективу изучения курса математики (алгебры, геометрии). Выполнение действия «осуществление доказательства» или «осуществление плана решения задачи» соответственно в видах математической деятельности учащихся «изучение утверждения» или «процесс решения задачи» в форме дедуктивного рассуждения (с. 89, 90 и др.)

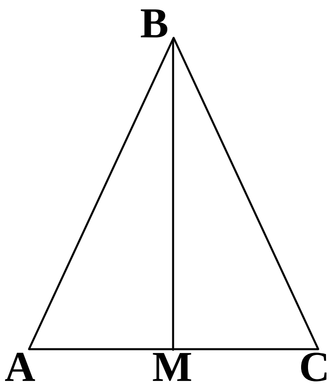
наглядно иллюстрирует значение изученной ранее теории, показывает, как следует изучать предмет, чтобы овладеть математическими знаниями.

Оба отмеченных примера с разных сторон, различными средствами позволяют учителю аргументированно убедить любого школьника в значимости изучения математики, а также в том, что овладеть этим предметом может каждый ученик, правда, уровень усвоения будет зависеть от того, какое место занимает он в системе ценностей ребенка. Мотивация учения, реализуемая посредством основных видов математической деятельности учащихся, представляет собой воплощение идеи воспитания школьников средствами своего предмета — образования с помощью математики [54]. Опыт показывает, что формирование основных видов деятельности учащихся при обучении математике способствует становлению их мотивации.

Тот или иной мотив побуждает человека к постановке задачи, к выявлению той цели, которая, будучи представлена в определённых условиях, требует выполнения действия, направленного на создание или получение предмета, отвечающего требованиям мотива и удовлетворяющего потребность. Способ и характер выполнения действия, направленного на решение задачи, определяется её целью, в то время как условия задачи определяют конкретные операции, входящие в данное действие.

Деятельность может утратить свой мотив и превратиться в действие, а действие при изменении его цели может превратиться в операцию. Подвижность составляющих деятельности выражается и в том, что каждая из них может стать дробной или, наоборот, будет включать в себя другие [63]. Проиллюстрируем сказанное примером деятельности «выведение следствий». В исследованиях Н.Ф. Талызиной по деятельностной теории учения младших школьников выведение следствий выступает как «общий вид познавательной деятельности», как «прием логического мышления» [128, с. 56].

Как известно, «выведением следствий» называется действие, состоящее в получении «следствий из факта, что объект принадлежит к классу объектов, охарактеризованных определением» [68, с. 43]. Ясно, что при усвоении нового математического понятия, его определения, упражнения на выведение следствий являются обязательными. При этом «*выведение следствий*» в структуре деятельности «введение понятия» выступает как действие (см. с. 78). Это действие утрачивает свою цель в таких видах деятельности при обучении математике, как «изучение утверждения» и «процесс решения задачи», обращаясь в операцию. Покажем это на примере утверждения о медиане равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.



<u>Дано:</u> ΔABC — равнобедренный,

$[AC]$ — основание, $[BM]$ — медиана.

<u>Доказать:</u> $[BM]$ — биссектриса ΔABC.

В *дедуктивном рассуждении*, являющемся материализованным действием доказательства этого свойства, операция «выведение следствий» применяется

Таблица 1

Доказательство:

№	Малая посылка (условие)	Большая посылка (Обоснование)	Утверждение (Заключение)
1	ΔABC – равнобедренный, $[AC]$ – основание	Определение равнобедренного треугольника	$[AB]=[BC]$
2	ΔABC – равнобедренный, $[AC]$ – основание	Свойство углов при основании равнобедренного треугольника	$\angle A=\angle C$
3	$[BM]$ – медиана	Определение медианы треугольника	$[AM]=[MC]$
4	ΔABM и ΔCBM, $[AB]=[BC]$, $\angle A=\angle C$, $[AM]=[MC]$	Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними	$\Delta ABM=\Delta CBM$
5	$\Delta ABM=\Delta CBM$	Определение равных треугольников	$\angle ABM=\angle MBC$
6	ΔABC, $[BM]$, $\angle ABM=\angle MBC$	Определение биссектрисы угла треугольника	$[BM]$ – биссектриса ΔABC

четыре раза — при построении первого, третьего, пятого и шестого силлогизмов (табл. 1). Суждения, полученные на основе подведения объекта под определение понятия, являются результатом умозаключений — выведения следствий.

1.2.2. Потребность как побудительный фактор деятельности

«Предпосылкой всякой деятельности является та или иная потребность» [63, с. 312]. Различают *потребность* как одну из обязательных предпосылок деятельности (состояние нужды организма) и как фактор, направляющий и регулирующий конкретную деятельность субъекта в предметной среде [64]. В педагогическом исследовании потребности понимаются во втором смысле, а именно говорят о деятельности, осуществляемой ради удовлетворения предметом потребности. «Потребности управляют деятельностью со стороны субъекта, но они способны выполнить эту функцию лишь при условии, что они являются предметными» [64, с. 145]. Таким образом, если учащиеся на уроке не остаются равнодушными к заданию учителя, к созданной учителем проблемной ситуации, если они сосредоточены на поиске их решения, а не просто созерцают процесс или занимаются посторонними делами — значит, они *в деятельности*. И в этом случае *должным образом* организованная деятельность является тем средством, под воздействие которого «изменяется не только сам объект, но и отношение субъекта к объекту» [1, с. 230].

Без потребности не пробуждается активность ребёнка, у него не возникают мотивы, он не готов к постановке целей. Если у школьника нет познавательной активности, которая ведёт к учебной деятельности, то он не сможет ставить цели, не сможет реализовать их. Поэтому учителю нужно помогать детям, побуждать эту потребность. По своим источникам она имеет форму активно-свободных (неопределённых) движений, и в момент контактов с предметами она действительно независима от их конкретного содержания [149]. Но для того чтобы потребность трансформировалась в действие, в поступок, недостаточно её осознания, она должна быть усилена *волей.* Поэтому понятие «деятельность» необходимо связано с понятием мотива как направленности субъекта на отдельные стороны деятельности.

1.2.3. Мотив деятельности и его виды

Приведем самые емкие, на наш взгляд, психологические характеристики мотива деятельности, раскрывающие его сущность.

- Мотивация представляет собой сложный акт анализа и оценки альтернатив, выбора и принятия решения.
- Мотив – это направленность субъекта на отдельные стороны деятельности, связанные с внутренним отношением человека к этой деятельности.
- Мотивом называют опредмеченную потребность [64].

Мотив выступает как переживание субъекта, как проявление чувства (удивления, восторга, озадаченности), являющегося источником действия, побуждением к нему. В обучении процесс мотивации осложняется тем, что далеко не всегда реальные мотивы осознаются субъектом актуально. Деятельности без мотива не бывает: «немотивированная» деятельность обычно имеет субъективно или объективно скрытый мотив. Задача учителя состоит в том, чтобы поддерживать положительное отношение школьников к учению, «проявляя» для них при необходимости мотив деятельности.

Существует несколько классификаций мотивов. По характеру направленности различают *познавательные и социальные* мотивы. Если в ходе учения преобладает направленность учащихся на содержание учебного предмета, то налицо познавательные мотивы. Если же преобладает направленность на отношения с другими людьми, то говорят о социальных мотивах.

Учебная деятельность всегда полимотивирована. В системе учебных мотивов переплетаются *внешние и внутренние* мотивы. Внутренним мотивом учебной деятельности является собственное развитие в процессе учения. Внешние мотивы познавательной деятельности — это учёба как вынужденное функционирование, учёба ради лидерства, стремление оказаться в центре внимания – порождены внешними факторами, они ориентированы на другого человека, их называют, как сказано выше, социальными. Внешние мотивы оказывают и положительное, и отрицательное влияние на характер учебного процесса.

Одной из основных задач преподавателя является повышение в структуре мотивации удельного веса внутренней мотивации. Виды мотивов, а также проблема их формирования исследуется отдельно, особенно значимы в этом отношении исследования А.К. Марковой [69, 70], Г.И. Щукиной [147, 148]. В целях данного исследования перечислим уровни выделенных выше видов мотивов познавательной деятельности и дадим их краткую характеристику. Уровни познавательных мотивов: «*широкие познавательные* мотивы (ориентация на овладение новыми знаниями – фактами, явлениями, закономерностями); *учебно-познавательные* мотивы (ориентированы на усвоение способов добывания знаний); мотивы *самообразования* (ориентация на приобретение дополнительных знаний)» [70, с. 18]. Уровни социальных мотивов: *широкие социальные* мотивы (долг, ответственность, понимание общественной значимости учения); *узкие социальные,* или *позиционные,* мотивы (стремление занять определённую позицию в отношениях с окружающими, получить их одобрение или стремление избежать неприятности — отрицательные мотивы); мотивы *социального сотрудничества* (ориентация на разные способы взаимодействия с людьми).

Знания о понятии мотива и его видов дает возможность педагогу выстраивать процесс обучения как деятельность. Потребности в новых знаниях как психологической основе учебной деятельности может не быть не только у ребенка, начинающего обучение в школе. Она может быть утрачена и в ходе обучения: дети часто не понимают, зачем им изучать, в частности, функции или трапецию. Т.е. потребность, находясь, вообще говоря, вне субъекта, должна благодаря усилиям, например педагога, превратиться в мотив. Для того чтобы сохранить положительное отношение детей к учебной деятельности, нужно выполнить хотя бы два условия, указывает Н.Ф. Талызина:

- включать учащихся в решение познавательных задач, решая которые они будут *узнавать новое* об окружающем мире;

- дидактические игры должны органически входить в учебный процесс начальной школы [128].

Специально подчеркивается важнейшее положение – следствие первого условия: «учащиеся должны получать не готовые знания и просто запоминать их, а именно как бы открывать их для себя» [Там же, с. 30]. Второй важный момент, связанный с содержанием и дальнейшим формированием познавательной мотивации у детей, объясняется сохранением роли игровой деятельности как ведущей у достаточного количества детей и не только начальной школы. Понимая, что учение как ведущая деятельность не может быть сформирована мгновенно, введение игр должно быть использовано для развития деятельности учения. При этом «нельзя чрезмерно увлекаться игровыми ситуациями» [128, с. 31].

Используя характеристику мотива как опредмеченной потребности и структуру деятельности (рис. 1), можно зафиксировать процесс мотивации в учении как «отделение знания от незнания» (рис. 2).

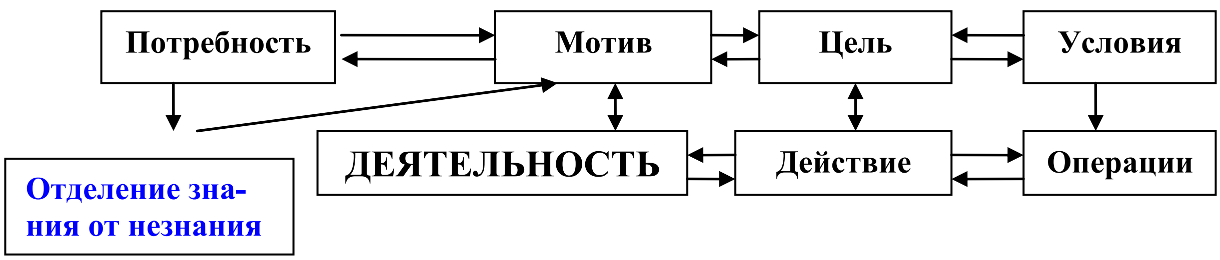


Рис. 2

Ниже, в описании осуществления деятельностного подхода к обучению, мотивации в процессе изучения математики уделено достаточно много внимания. В данном месте ограничимся двумя примерами. При введении понятия трапеции «отделить знания от незнания» можно следующим образом. На этапе актуализации знаний достаточно представить рисунки с изображением некоторых четырехугольников (рис. 3). Известные четырехугольники учащиеся назовут и даже смогут сформулировать их определения. Название пятого четырехугольника им, скорее всего, неизвестно. Познавательное затруднение способствует целеполаганию: изучить новое понятие.

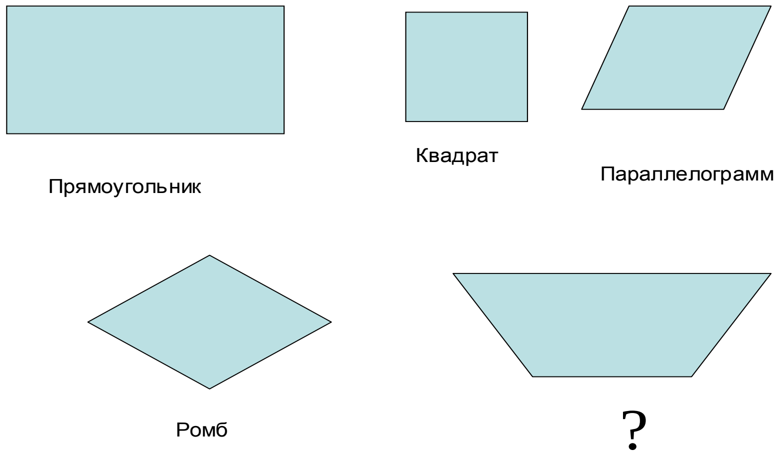


Рис. 3

Другой пример связан с введением понятия логарифма числа. Для мотивации учащихся к изучению логарифма и его обозначения может быть задание на решение нескольких простейших показательных уравнений, корни которых они ранее находили, решая различные показательные уравнения, приведением к одному основанию. Во-первых, умение решать показательные уравнения (1) – (4) играет роль входного контроля, констатирующего усвоение метода решения простейших показательных уравнений. Во-вторых, успешное выполнение этого задания — основа приема мотивации — «отделение знания от незнания».

$2^x = 64$ (1) $\quad$ *Ответ*: $\{6\}$.

$2^x - \frac{1}{4} = 0$ (2) $\quad$ *Ответ*: $\{-2\}$.

$3^x + 9 = 0$ (3) $\quad$ *Ответ*: ø

$5^x = \sqrt[3]{25}$ (4) $\quad$ *Ответ*: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

$3^x = 5$ (5) $\quad$ *Ответ*: $\{?\}$.

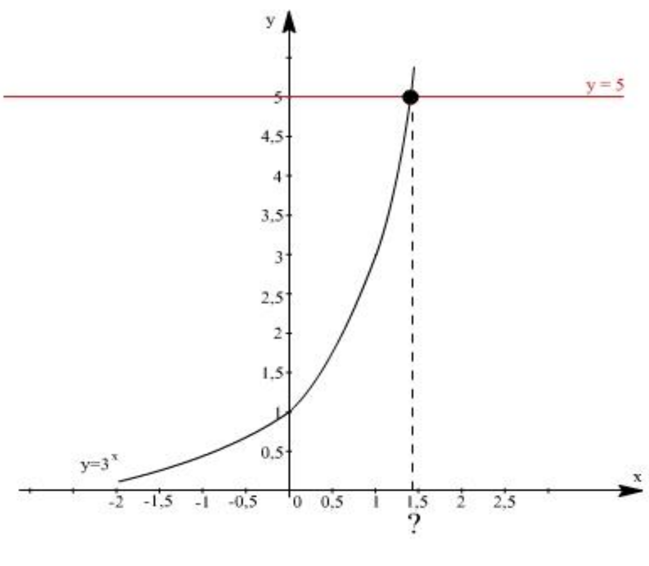


Рис. 4

Графическое решение последнего уравнения (рис. 4) показывает, что его корни существуют, как и в уравнениях (1), (2), (4). Однако назвать соответствующее число, записать его учащиеся не могут, т.к. соответствующих знаний у них пока еще нет: момент «отделения знания от незнания». Возникает осознание учащимися потребности в новых знаниях, в расширении понятия числа, во введении обозначения для этого числа: $\log_3 5$. Источником возникновения деятельности и в этом случае является потребность во введении в изучение нового для учащихся математического объекта. Иллюстрацию нового объекта, выделение его из ранее известных, внимание к нему обеспечивает специальное задание, предложенное учащимся.

Как видно из приведенных примеров, осуществить мотивацию на уроках математики, выполняя «отделение знания от незнания», можно всегда. Приведенные примеры иллюстрируют *принципиальную возможность* мотивации при введении новых понятий. Аналогично организуется мотивация при изучении свойств понятий, выраженных в аксиомах и теоремах. Значительно проще обстоит дело при решении задач, поскольку задача есть, с точки зрения А.Н. Леонтьева, «цель, данная в определенных условиях» [63, с. 309].

Итак, мотивация способствует пониманию учащимися необходимости изучения нового понятия, готовности их к деятельности, осуществляемой обычно некоторой совокупностью *действий*. Действия подчиняются частным *целям,* которые могут выделяться из общей цели — осознанного мотива. Всякое действие всегда исходит из тех или иных побуждений, которые осознаются человеком и становятся мотивом его деятельности. Побуждение как мотив деятельности осознается, прежде всего, через соотнесение его с целью. Таким образом, цели и действия оказывают влияние на мотивацию деятельности, в которую они входят. Мотивы формируются под влиянием целей деятельности, определяются ими по мере того, как человек учитывает, оценивает и взвешивает конкретные обстоятельства, в которых он находится.

1.2.4. Цели и действия

Характеризуя структуру деятельности, А.Н. Леонтьев утверждает: мотив определяет *цели* деятельности, а цель – *действие*. «Цели не изобретаются, не ставятся субъектом произвольно. Они даны в объективных обстоятельствах» [64, с. 155]. Мотивация в познавательной деятельности реализуется постановкой проблемной ситуации [73, 74], посредством которой формулируется цель-мотив. В современной теории *учебной деятельности* этот процесс называют постановкой учебной задачи [31, 146, 150 и др.].

Мотив тесно связан со смыслом *действия* (действий). Смысл действия выражает отношение мотива деятельности к *цели* (общей цели) действий. Осознанность знаний характеризуется тем, какой смысл приобретают они для человека, т. е. насколько они соотносятся с *целью*. Смысл действия, соответствующего общей цели, меняется вместе с изменением его мотива. По своему объективному содержанию действие может оставаться почти тем же самым, но если оно приобрело новый мотив, то психологически оно стало уже иным.

Цель – это направленность активности субъекта на промежуточный результат, чтобы реализовать учебный мотив, надо поставить и выполнить много промежуточных целей. Постановка целей – это характеристика специфики человеческого поведения. Итак, цель – это направленность ученика на выполнение отдельных действий, входящих в учебную деятельность. «Какую бы деятельность ученики не осуществляли, она должна иметь психологически полную структуру — от понимания и постановки школьниками целей и задач через выполнение действий, приемов, способов и до осуществлений действий самоконтроля и самооценки» [70, с. 59]. Говоря языком деятельностной теории учения, задача современного учителя состоит в том, «чтобы ученик постоянно был мотивирован к действиям — и в начале урока, и в ходе его, и в конце урока» [Там же, с. 60].

Часто ученик не умеет ещё ставить цели, обосновывать их, определять главные и второстепенные цели. Учителю нужно научить школьника умению воплощать свои мотивы через последовательность, систему целей, а для этого учителю следует научить ученика понимать цели, поставленные им, самостоятельно ставить цели, формулировать их, соотносить цели со своими возможностями [70]. Так, при ознакомлении с процентами в пятом классе дети ставили перед собой цели: узнать всё об этом понятии, научиться применять его в решении практических задач. На уроке многие из них усвоили понятие процента, а также узнали, что существует три типа задач на проценты. В обучении постоянно осуществляются взаимопереходы мотивов и целей учения. Рождение нового мотива вызывает новые цели, а достижение последних способствует обратному влиянию на мотивы – появлению новых мотивов [31]. Именно динамичный характер деятельности увлекает учащихся, достижение поставленных целей воодушевляет, способствует возникновению новых потребностей, мотивации учения.

Структура понятия деятельности (рис.1) четко показывает, что действия являются основными составляющими деятельности. В то же время структурно «действие» определяется целью, на достижение которой оно направлено, и мотивом, побуждающим человека стремиться к данной цели, и условиями, в которых оно совершается. Отсюда понятно, что *действием* называют процесс, подчиненный сознательной цели [64]. Это акт целенаправленной деятельности человека, регулируемый осознанием ожидаемого результата, условий и путей его достижения. В связи с последним описанием понятия действия как явления, регулируемого результатом, условиями и способами достижения, целесообразно дополнить структуру деятельности (рис. 5). Вычленение структуры основных видов деятельности учащихся при обучении математике позволило разработать технологию осуществления деятельностного подхода (глава 3), благодаря которой обеспечивается развивающий эффект обучения.

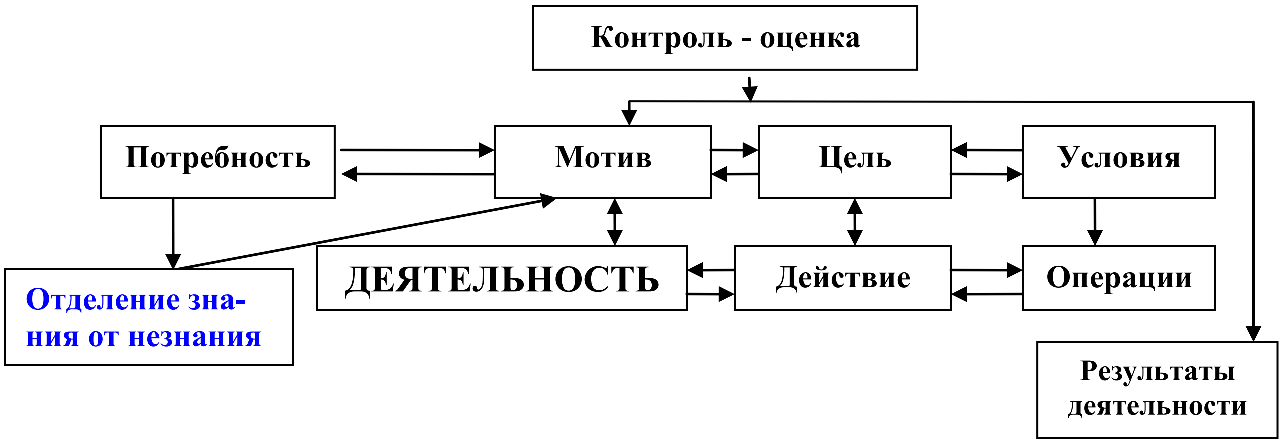


Рис.5

Выделение целей и формирование подчиненных им действий приводит к расщеплению прежде слитых между собой в мотиве функций. При этом функция побуждения полностью сохраняется за мотивом, а действия, осуществляющие деятельность, являются направленными на цель [64]. Так, действие «изучение задачи» в деятельности по решению школьных математических задач [50, 52, 56 и др.] направлено на достижение цели «понять задачу», являющейся первой целью, составляющей общую цель — найти ответ на поставленный в задаче вопрос. Познавательный мотив деятельности «процесс решения задачи» — отыскание способа решения задачи.

Итак, достижение цели осуществляется конкретными действиями. Действие – это процесс, подчинённый сознательной цели. Если мотив деятельности трансформируется в цель, то деятельность – в действие. Специфической чертой действия является его сознательный, целенаправленный характер. Однако наличие одной цели ещё недостаточно для определения человеческого действия. Для того чтобы оно могло осуществляться, необходимы *определённые условия*. Соотношение цели с условиями ставит задачу (новую цель), которая должна быть разрешена действием (совокупностью составляющих его операций). В процессе решения учебной математической задачи, например, соотнесением цели «понять задачу» с условиями (вид, сюжет задачи), ставится новая цель — выбор модели, наиболее адекватно отражающей структуру задачи. Такая модель, которая может быть представлена схематичной записью, или диаграммой, или таблицей, наконец, рисунком — в зависимости от фабулы задачи (см. с. 101 – 104).

1.2.5. Операции достижения цели

Наряду с действием процессуальным компонентом деятельности является операция. «Действие имеет особое качество, особую его «образующую», а именно способы, какими оно осуществляется. Способы осуществления действий я называю операциями» [64, с. 156]. Таким образом, каждое действие состоит из соответствующих операций, наборы которых меняются в зависимости от конкретных условий решения учебной задачи. Они образуют «технический» состав действия и всегда зависят от условий, в которых достигается поставленная цель. В силу этого действие отвечает не только своей непосредственной цели, но также и тем условиям, в которых эта цель дана и которые определяют сам способ выполнения действия. Уточняя ещё более детально это положение, А. Н. Леонтьев считает, что операция определяется задачей, т.е. целью, данной в конкретных условиях, требующих определённого способа действия. «Осуществляемое действие отвечает задаче; задача — это и есть цель, данная в определенных условиях» [64, с.156].

Любая операция как способ выполнения действия, определяемый задачей, может сформироваться, согласно А. Н. Леонтьеву, двумя существенно различными путями. Один путь – слияние в процессе деятельности отдельных частей действий в единое сложное действие. Здесь бывшие ранее самостоятельными, т.е. направленными на свои цели, частные действия входят в состав нового сложного действия (как его звенья), занимают в нём структурное место условий его выполнения, т.е. превращаются в операции. Это так называемые сознательные операции. Они отличаются своей гибкостью и управляемостью.

Примером такого слияния операций и превращения действия в операцию, а деятельности — в сложное действие, является процесс решения задачи в обучении математике. Если задача аналогична решенным ранее и действия, составляющие ее, уже выполнялись учеником и, значит, функционируют на репродуктивном уровне, не требуют расчленения и специального обдумывания, то такие действия, как изучение задачи, поиск плана решения, осуществление плана решения задачи выполняются как операции, а процесс решения задачи — как действие. У каждого ученика процесс свертывания действий зависит от его психологических качеств (задатков, способностей) [55], поэтому процесс решения задачи как деятельность наиболее индивидуален в отличие, например, от деятельности введения понятий.

Другой путь формирования операций заключается в приспособлении действия к новым условиям его выполнения или же к чужим действиям в ситуации подражания демонстрируемой операции – образцу. Основное значение в обучении имеет, конечно, первый путь формирования операций. Для этого необходимо поставить ученика перед такой новой целью, при которой предпринимаемое им действие станет способом выполнения другого действия. При этом действия, направленные ранее на достижение частных целей, составляющих подцели новой цели, должны стать способами достижения новой сложной цели в процессе нового сложного действия.

В концепции строения деятельности А.Н. Леонтьева и деятельность, и действие, и операция выступают не как отдельности, а как переходящие одно в другое, неразрывно связанные между собой функциональные образования.

Термины «действие» и «операция» часто не различаются. Но их различие необходимо. Действия адекватны целям, операции – условиям. Особенно наглядно несовпадение действий и операций выступает в орудийных действиях. Орудие есть материальный предмет, в котором кристаллизованы именно способы, операции, а не действия, не цели. Например, можно физически расчленить вещественный предмет при помощи разных орудий, каждое из которых определяет способ выполнения данного действия. В одних условиях более адекватным будет операция резания, а в других – операция пиления; при этом предполагается, что человек умеет владеть соответствующими орудиями – ножом, пилой, топором. Действия и операции имеют разное происхождение, разную динамику и разную судьбу. Генезис действия лежит в отношениях обмена деятельностями; всякая же операция есть результат преобразования действия, происходящего в результате его включения в другое действие [64].

1.2.6. Предмет деятельности

«Основной, или, как иногда говорят, конституирующей, характеристикой деятельности является её предметность. Собственно, в самом понятии деятельности уже имплицитно содержится понятие ее предмета (Gegenstand). Деятельность может казаться беспредметной, но научное исследование деятельности необходимо требует открытия ее предмета. При этом предмет деятельности выступает двояко: первично – в своем независимом существовании, как подчиняющий себе и преобразующий деятельность субъекта, вторично – как образ предмета, как продукт психического отражения его свойств, которое осуществляется в результате деятельности субъекта и иначе осуществиться не может» [64, с. 142].

Таким образом, предмет деятельности проявляется в двух аспектах: объективном и субъективном. То есть предмет деятельности следует принимать как образ предмета (объекта) и как продукт психического отражения его свойств в результате деятельности субъекта. Таковыми являются, в том числе, определения понятий, формулировки теорем в знаковой и текстовой формах.

Определение

Арифметическая прогрессия $\xleftrightarrow{def} (a_n): a_{n+1} = a_n + d$, где $n \in \mathbf{N}, d \in \mathbf{R}$.

<u>Числовую последовательность,</u> каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют <u>*арифметической прогрессией,*</u> а число d — разностью арифметической прогрессии [81, с. 102].

Теорема о свойстве медианы равнобедренного треугольника:

$$(\forall \Delta ABC - \text{равнобедренный})(([BD] - \text{медиана}) \Rightarrow ([BD] - \text{биссектриса})).$$

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой (и высотой)[1] [101, с. 39].

Отдельные конкретные виды деятельности можно различать между собой по любому признаку: по их форме, по способам их осуществления, по их эмоциональной напряженности, по их временной и пространственной характеристике, по их физиологическим механизмам и т.д. Однако главное, что отличает одну деятельность от другой, состоит *в различии их предметов*. Именно предмет деятельности придает ей определенную направленность, отмечает А.Н. Леонтьев, предмет деятельности есть ее *действительный мотив*. Мотив деятельности может быть как вещественным, так и идеальным, как данным в восприятии, так и существующим только в воображении, в мысли. Главное, что за ним

[1] В учебнике геометрии, как правило, сформулирована сложная теорема.

всегда стоит потребность, что он всегда отвечает той или иной потребности [63]. Остановимся на специфической математической деятельности учащихся — решении уравнений. Предметом этой деятельности является теория решения уравнений, которую составляют понятия «уравнение», «корень уравнения», задача «решить уравнение». Задача «решить уравнение» требует расширения понятийного аппарата — введения понятий «множество решений уравнения», «равносильные уравнения», а также изучения свойств равносильных уравнений. Ощутить сложность предмета этой деятельности, осознать трудности усвоения этого понятия учащимися позволяет символическая запись определения равносильных уравнений:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \xleftrightarrow{def} \mathbf{X}\equiv\mathbf{Y},\ \textit{где}\ \mathbf{X}=\{x \mid f(x)=0\},\ \mathbf{Y}=\{x \mid g(x)=0\}.$$

Два уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$ называются *равносильными,* если множества их корней совпадают. Очевидно, что теория решения уравнений, представленная традиционно в седьмом классе [3, 46 и др.], как предмет деятельности, не обеспечивает создание должной мотивации при ее изучении. К этому моменту учащиеся не владеют даже символическим обозначением функции. *Деятельность* «решение уравнений» может быть порождена *мотивом*, истоки которого в её *предмете*. Следовательно, деятельностный подход при изучении уравнений требует критического анализа *предмета* специфической деятельности учения. Этому вопросу посвящен пункт 3.1.3 третьей главы монографии.

Предметом познавательной деятельности учащихся является *научное знание* или его элементы (понятия, законы, идеи, принципы, правила, входящие в структуру каждой науки), указывает П.И. Пидкасистый, описывая научные основы структурного анализа познавательной деятельности учащегося. При обучении математике предметом познавательной деятельности являются математические понятия (основные и производные), отношения между ними и свойства, представленные в аксиомах и теоремах. В целях данного исследования следует достаточно подробно описать предмет познавательной математической деятельности учащихся средней общеобразовательной школы.

К основным *понятиям* школьного курса математики, как известно, относят понятие числа, множества, элемента множества; к основным *отношениям* — принадлежность или непринадлежность элемента множеству. Простой пример: рассмотрим букву *а* русского языка и **А** – множество букв алфавита русского языка. Если $a \in \mathbf{A}$, то $d \notin \mathbf{A}$ (d – буква латинского алфавита). Заметим, что уже в этом простейшем описании использовано логическое понятие «высказывание» и использованы логические операции импликации, отрицания и эквиваленции (неявно): $d \notin \mathbf{A} \Leftrightarrow (\neg(d \in \mathbf{A}))$. Высказывание $a \in \mathbf{A}$ является истинным, $d \in \mathbf{A}$ – ложно.

Как видно из приведенных примеров, элементы логики входят в изложение математических знаний, являясь средством математического языка. Наиболее ярко необходимость в применении математического языка видна при изучении школьного курса геометрии, построенного по законам логики. Основные геометрические фигуры (объекты): точка, прямая, плоскость относят к основным (неопределяемым) математическим понятиям. Свойства основных понятий раскрываются в *аксиомах* (основных свойствах), производным понятиям даются *определения*.

В пропедевтическом курсе математики не все понятия и отношения определяются. Так, например, понятие натурального числа вводится в математике «через абстракцию» [75, с.70] или аксиоматически (аксиомы Пеано) [99]. Такие понятия вводятся посредством поясняющих описаний: в пятом классе натуральное число характеризуется как число, используемое при счете предметов [37, 71 и др.]. Отношения между числами и операции над ними не определяются, а формулируются *правила* (алгоритмы действий).

Свойства производных понятий формулируются в суждениях, различающихся структурой и областью истинности. Утверждение, истинность которого доказана в данной теории, называют *теоремой* [113]. Таким образом, предмет познавательной математической деятельности учащихся средней общеобразовательной школы составляют математические (в том числе логические) понятия, отношения между понятиями, определения производных понятий, аксиомы и теоремы, алгоритмы и правила. На описании предмета познавательной деятельности при обучении математике более детально остановимся в разделе о дидактических аспектах реализации деятельностного подхода при обучении математике в следующей главе.

Завершая описание «научного знания» как предмета познавательной деятельности, снова обратим внимание на процедуру познавательной деятельности, описанную П.И. Пидкасистым. Ученик усваивает «научное знание, которое первоначально выступает в его деятельности как объект познания. Став же достоянием ученика, это знание в его последующей познавательной деятельности выступает в сознании школьника, с одной стороны, уже как сам предмет познавательной деятельности, с другой – как её результат» [98, с. 84].

В результате материализованы цели, предметные действия, операции, способности и возможности личности. С результатом сопряжена оценка и самооценка личности, ее статус в коллективе. Это оставляет большой след в развитии личности, ее побуждений, устремлений, ее действий, ее умений и способностей. Таким образом, деятельность — это подлинный источник развития личности. Это показатель развития, знаний, умений личности не только для окружающих, но и для нее самой, что, пожалуй, более для нее значимо.

ГЛАВА 2. ДИДАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Для решения проблем следует выбирать
расчленения и деления.
Аристотель

В целях данного исследования остановимся на двух положениях психологической теории деятельности: ее предметности и единстве внешней – практической и внутренней – психической деятельности.

2.1. Научное знание как предмет познавательной деятельности ученика

Принцип предметности составляет ядро
психологической теории деятельности.
В.В. Давыдов

Общеизвестно, что деятельность в процессе обучения складывается из двух основных видов: деятельности учителя – преподавания и деятельности ученика – учения. Остановимся на трактовках данных понятий, сформулированных И.Я. Лернером. Преподавание – деятельность по организации усвоения содержания и руководству этим усвоением. Учение – деятельность ученика по организации условий, обеспечивающих усвоение им содержания образования. Обучение людей – «акт взаимодействия учителя и ученика с целью усвоения последним некоторого содержания социального опыта. Процесс обучения – происходящая по определенным объективным законам смена актов обучения, в ходе которой изменяются деятельность учителя и учащихся, а также личные качества учащихся в результате их деятельности» [65, с.12]. Структуру процесса обучения И. Я. Лернер представил таким образом:

УЧИТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ⟷ УЧЕНИК

П.И. Пидкасистым структурные компоненты обучения представлены аналогичной триадой: содержание образования, деятельность преподавания и деятельности учения [98]. В результате анализа познавательной деятельности учащегося автором выделяется предмет деятельности — «объективированное научное знание или его элементы» [98, с. 84]. Как видно из анализа структуры процесса обучения, компоненты этого процесса объединяет *предмет* познавательной деятельности. В методической литературе отмечается, например, что методы познания выступают как элементы «содержания образования — с одной стороны, и как приемы мышления — с другой [113, с.113]. Соотнесение этого факта с триадой П.И. Пидкасистого позволяет утверждать, что методы научного познания принадлежат и к содержанию обучения (научному знанию), и деятельности учения (общие познавательные действия). Итак, как эмпирические, так и логические методы научного познания входят, стало быть, в состав предмета познавательной деятельности.

Познавательная деятельность в структуре обучения довольно специфична, поскольку она определяется и особенностями преподавания (деятельностью преподавателя), и спецификой предмета познавательной деятельности. П.И. Пидкасистый особо характеризует предмет – научное знание, которое имеет *две стороны*: логико-операционную и содержательную. Логико-операционная сторона – это слова, знаки, символы, их структурные связи. Содержательную сторону составляют признаки, свойства, качества, отношения реального мира, т.е. всё то, о чем информируют нас слова, символы и знаки. Таким образом, научное знание имеет свою *форму* и *содержание*. Чтобы самостоятельно конструировать знания, надо знать, что (понятие, закон, правило) и *как* конструировать. Иными словами, обучаемых нужно «учить познавательной деятельности, вооружать их учебно-познавательным аппаратом» [98, с. 89].

Цель данной главы — выделить особенности предмета познавательной деятельности — научного знания — при изучении математики в средней школе. Содержанием учебного предмета «математика» являются факты курса арифметики, алгебры, геометрии и математического анализа. Формой – понятия, аксиомы, теоремы, символы и логические связки, с помощью которых можно представить и раскрыть содержание учебного материала. К логико-операционной стороне курса математики (форме научного знания) относятся, наряду с её логическим строением, определения понятий и их структура, структура аксиом и теорем, виды теорем, доказательство и методы доказательства утверждений.

Таким образом, в исследовании реализации деятельностного подхода в процессе обучения математике мы исходим из *признания приоритета предмета* познавательной деятельности, обеих его сторон (логико-операционной и содержательной) как основы разработки дидактических средств для решения поставленных задач. На наш взгляд, в исследовании проблемы реализации деятельностного подхода при обучении математике недостаточно глубоко использованы сущность и роль логико-операционной стороны научного знания. В данном исследовании, выделяя как главную задачу математического образования школьников формирование у них основных видов деятельности, присущих обучению математике, мы исходим в первую очередь из того, что структура (форма) математического знания должна быть усвоена учащимися так же, как его содержание. Более того, качество усвоения знаний существенно зависит от того, как усвоен процессуальный аспект — форма предмета познавательной деятельности. В традиционном обучении (многовековом опыте) основное внимание было сосредоточено на содержательной стороне научного знания, что привело в конце XX века к противоречиям в обучении, отразившимся, в частности, в утрате интереса к учению значительной части школьников, в резком отставании их от наиболее способных учащихся.

Процитируем в связи с этим очень значимое, на наш взгляд, описание П.И. Пидкасистым познавательной деятельности учащегося в условиях информационно-объяснительного (традиционного) обучения и в условиях осуществления деятельностного подхода к обучению. В условиях информационно-объяснительного обучения, когда учитель выступает в основном в роли информатора, познавательная деятельность ученика не может быть предметом обучения, поскольку она сама является следствием поступления информации. Информация поступает – познавательная деятельность совершается; подача её прекращается – прекращается и познавательная деятельность.

Для того чтобы научить школьников познавательной деятельности, надо в процессе обучения выделить *особые формы* и *способы действий*, с помощью которых они будут усваивать знания. «Определённая последовательность действий является не только способом раскрытия содержания понятий, но и предметом усвоения» [98, с. 89]. Научные знания могут стать достоянием индивида только через его активную практическую и мыслительную деятельность. Для этого *нужен познавательный инструментарий*, помогающий проникать в сущность предмета познания. Он представляет собой совокупность логических средств добывания знаний. Обучение учащихся «способам выполнения познавательных действий и успешное вооружение их необходимым и специфическим для каждого учебного предмета инструментарием логических операций связаны, прежде всего, с соответствующей организацией учебной деятельности школьника в процессе обучения» [Там же, с.90].

Аналогичные выводы следуют из работ Н.Ф. Талызиной. Например, в статье «Что значит знать?» автор, анализируя отношения между знаниями и познавательными действиями человека, отмечает как важную методическую задачу «определить те виды деятельности, которым необходимо учить при усвоении знаний» [127, с. 98]. Наконец, исследование проблемы развития познавательной самостоятельности учащихся в обучении математике [106] и многолетний опыт работы учителем математики убеждают, что только *целенаправленное* формирование действий, присущих математической деятельности, приводят к положительным результатам обучения. Такими действиями в обучении математике являются, например, изучение текста задачи (анализ как разложение целого на части), обнаружение закономерности и формулировка нового утверждения (неполная индукция, обобщение), поиск плана решения задачи и доказательства теоремы (метод восходящего анализа), построение доказательства теоремы, осуществление плана решения задачи (дедуктивное рассуждение).

Наблюдения за работой студентов показывают, что в проблемной ситуации их, как правило, может выручить только предшествующий опыт решения данной задачи. В отсутствии такового студенты математического факультета, к сожалению, проявляют беспомощность. Они стараются применить теорему, в которой идет речь об объектах, входящих в условие задачи; выполнить возможные, часто встречаемые в аналогичных ситуациях дополнительные построения, но все безуспешно. Дело в том, что при этом студентами используются действия (приемы), основанные на синтетическом методе, применяемом для оформления результатов решения задачи.

Часто при изучении методов научного познания с третьекурсниками, а также при изучении сущности деятельностного подхода к обучению со студентами пятого курса педагогического университета для мотивации их учения предлагаются следующие две задачи.

Задача 1. Найдите сумму дробей: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2008\cdot 2009}$ (задача школьного или районного тура математической олимпиады).

На решение задачи отводится столько времени, чтобы можно было осуществить поиск и решение задачи. Из немногочисленных гипотез поисковой деятельности появляется правдоподобный результат: значение суммы равно 1. Остальные предположения — попытки угадывания, без должного анализа и индуктивных поисков. Как правило, приходится резюмировать, что без посторонней помощи задача студентами (группа в 20-30 человек) не может быть решена в данный момент. Причина — отсутствие навыков индуктивного поиска. Студенты привыкли получать готовые знания, а не открывать их. Оказалось, это еще и школьная привычка.

Задача 2. В треугольнике ABC угол A равен 30°, а угол B равен 50°. Докажите, что верно равенство: $c^2 = b\cdot(a + b)$, где a, b, c – стороны треугольника.

Первое действие процесса решения задачи — изучение задачи, выражающееся во внешней деятельности построением чертежа и записью условия и требования задачи, выполняется каждым студентом. Это общее действие, основанное на простом анализе текста, многократно повторяемое в процессе обучения, формируемое при доказательстве теорем и решении многих типов математических задач, а также в решении задач по физике, химии, как правило, не вызывает затруднений. Следующее действие — поиск плана решения, также часто используемое в решении задач, в данной задачной ситуации обнаруживает полное отсутствие *привычки* выполнять *целенаправленный* поиск: осуществлять рассуждение, например, восходящим анализом.

И студенты, и учителя математики (часто доводится работать на курсах повышения квалификации), опираясь на многолетний *опыт*, *память,* выполняя поиск плана решения данной задачи, записывают и пытаются применить теорему косинусов (схожие составляющие с требованием задачи), теорему синусов (сторона a — угол A равен $30°$; сторона b — угол B равен $50°$), свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в $30°$, теорему Пифагора (проводя высоту треугольника ABC), т.е. рассуждают сообразно синтетическому методу и … заходят в тупик. План решения задачи не появляется.

Обсуждение создавшейся проблемной ситуации показывает, что рассуждение восходящим анализом в большинстве случаев не выполнялось решающими задачу. Привычка рассуждать по схеме восходящего анализа в проблемной ситуации не сформирована вообще. В подобных ситуациях человек привык идти путем проб и ошибок, используя предшествующий опыт. В теории обучения математике вопросу применения метода восходящего анализа уделяется большое внимание [20, 75, 113, 138 и др.], ему обучают будущих учителей, формируют умение задавать вопросы учащимся в соответствующих ситуациях. Но не обсуждается проблема формирования умения учащихся задавать себе вопросы, целенаправленные, приводящие к открытию способа решения задачи, плана доказательства теоремы.

Возможно, что причинами подобной ситуации являются эвристический характер метода восходящего анализа, трудности в формировании его у школьников в связи с временными затратами и профессионализмом учителя, отсутствие установки на формирование привычки выполнять поиск решения задачи «от главного вопроса к условию», а не синтетическим методом «по образцу». До сих пор в методической литературе часто используется прием наводящего (по существу подсказывающего) вопроса учителя. Подсказывающими являются и вопросы актуализации знаний перед решением задачи. Практика обучения решению задач и доказательству теорем убеждает в том, что от проблемных ситуаций, так свойственных изучению математики, часто уходят, заботясь о темпе работы на уроке, о количестве решенных задач, а не о развитии мышления учащихся.

Таким образом, для обучения школьников познавательной математической деятельности нужно:

– выделить *основные* виды математической деятельности учащихся, с помощью которых они усваивают знания;

– описать структуры выделенных основных видов деятельности школьников при изучении математики;

– разработать технологию формирования этих видов деятельности у учащихся общеобразовательных учреждений.

Сформулированные выше принципы являются следствием принятого нами положения о сущности предмета познавательной деятельности учащихся. Они и составляют основу методической реализации деятельностного подхода к обучению математике в средней общеобразовательной школе. Для описания практического осуществления деятельностного подхода при обучении математике нами поставлена задача: обосновать и описать компоненты структуры деятельностей «введение понятия», «изучение утверждений», «процесс решения задачи» (глава 4, с. 69).

Кроме того, в ходе изучения сущности предмета познавательной деятельности учащихся, исследуя роль классификации при введении понятия, обращает на себя внимание следующая классификация понятия «выражение» [67, с.174] (см. ниже, рис. 6). На наш взгляд, она имеет принципиальное значение с точки зрения предмета деятельности при обучении математике. В частности, она полезна для осуществления *системного* отбора содержания обучения. Для изучения линейных неравенств, числовых функций и их свойств необходимы свойства числовых неравенств (выражений без переменной со знаком отношения), а для изучения уравнений — свойства числовых равенств. Числовые равенства и неравенства, как следует из классификационной схемы, составляют множество выражений – высказываний.

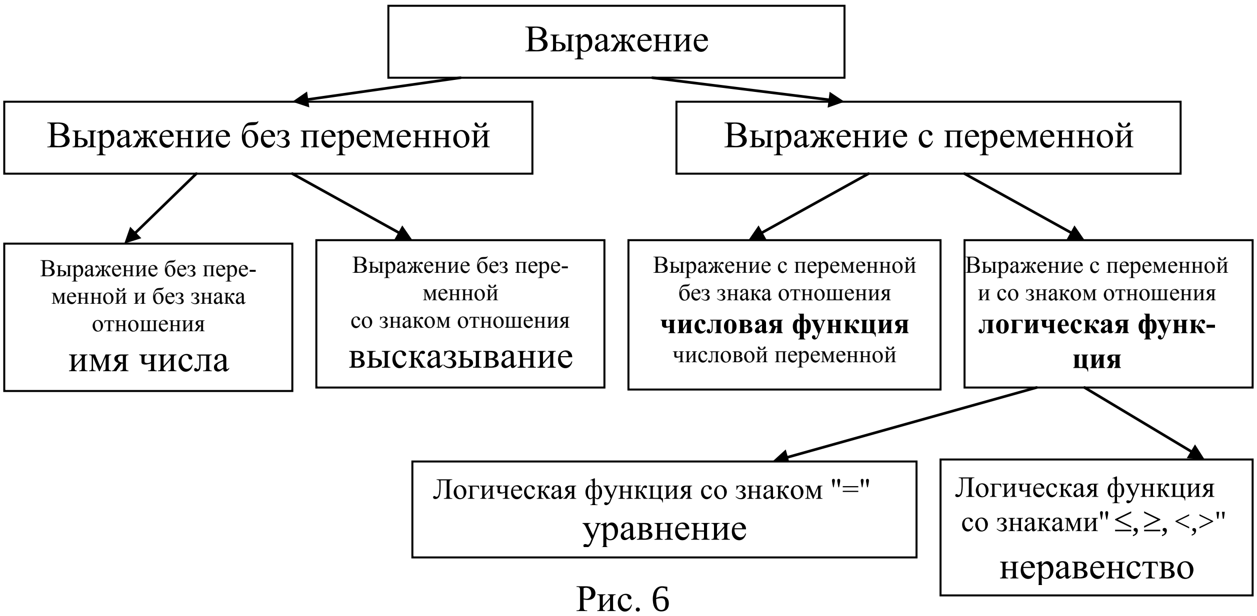


Рис. 6

В содержание обучения *традиционно* входит понятие «выражение» и его объем: выражения без переменной и выражения с переменной. Однако если выражения «имя числа» (без переменной и без знака отношения) изучаются в пятом, шестом и начале седьмого класса, то «высказывания» в явном виде в действующих учебниках [3, 79 и др.] не изучаются, а числовые неравенства вводятся в изучение только в конце восьмого класса [4, 80 и др.]. Опыт изучения числовых неравенств в седьмом классе (с введением определения понятия числового неравенства на основе отношений «больше», «меньше» и др.) в теме «Что такое математический язык», «Что такое математическая модель» [79, с. 16, 17] оказался весьма удачным. Тем более что изучение числовых промежутков предусмотрено учебником алгебры в седьмом классе [Там же, с. 98].

Теоремы о свойствах числовых неравенств наглядны, имеют импликативную структуру, например: «если $a > b$, *то* $b < a$». Их доказательства просты, не требуют много времени на изучение. А главное, свойства числовых неравенств в этом подходе являются первыми теоремами курса алгебры и позволяют вести обучение доказательству в начале изучения алгебры. Другое важное обстоятельство состоит в том, что на примере теорем о свойствах числовых неравенств можно формировать знания учащихся о предмете деятельности: о понятии «теорема», «структура теоремы», «доказательство». Наконец, в содержательном плане удается ввести *определение* возрастающей и убывающей функции, а свойство монотонности линейной функции [79, с. 122], функции $y = x^2$ [Там же, с. 133] учащиеся могут уже самостоятельно *доказать*.

2.2. Принцип единства внутренней и внешней деятельности в обучении школьников

Основываясь на открытом в психологии факте единства внешней – практической и внутренней – психической деятельности, обладающей взаимопереходами и взаимопревращениями, характерными для любой деятельности, Г.И. Щукина подчеркивает, что учителю важно видеть за любым своим заданием, за любым требованием, обращенным к ученику, те внутренние процессы школьника, которые обеспечивают новый уровень его развития. Из деятельности, организуемой учителем, ученик должен выходить обогащенным не только новыми фактами, но и способами их получения.

Конкретизацию категории «деятельность» по отношению к обучению Г.И. Щукина описывает следующем образом:

1) деятельность школьника связана с деятельностью других людей. В этом процессе происходит обмен опытом деятельности, ее видами, способами, происходит обогащение каждого;

2) развитие деятельности в педагогическом процессе означает поступательное развитие личности, т.к. меняется характер деятельности от исполнительской, через активно-исполнительскую к активно-самостоятельной и затем к творчески-самостоятельной;

3) развитие деятельности учащихся существенно влияет на изменение их позиции: от исполнительской — к активной, от позиции объекта обучения к позиции субъекта учебной деятельности;

4) становление личности ученика в учебном процессе обусловлено изменением регулятивных механизмов (внешних и внутренних). Уровень саморегуляции – основной показатель и механизм формирующейся личности школьника;

5) изменение позиции ученика обусловлено и межсубъектными отношениями. К саморегуляции ученика подводят личные образования: активность, самостоятельность, познавательный интерес, которые помогают осознанию своего продвижения; постепенно самоанализ учения рождает веру в свои силы. Его участие в деятельности становится органично сопряженным с деятельностью учителя [147].

Единство психической и внешней материальной деятельности состоит в том, что оба эти вида деятельности имеют идентичное строение. Другой аспект этого единства в том, что «внутренняя, психическая деятельность есть преобразованная внешняя, материальная» [128, с.14]. Это важнейшее положение во взаимосвязи его с принципом предметности деятельности является основой методической реализации деятельностного подхода в обучении. Только выстраивая внешнюю, материальную учебную деятельность во всей ее полноте, сообразно *предмету*, его *форме*, с учетом специфики научного знания, можно прогнозировать адекватное формирование внутренней, психической деятельности учащегося.

Разработка дидактических средств, приемов для осуществления деятельностного подхода в обучении основывается на принятии того, что «психическая деятельность формируется не просто *в* процессе практической, материальной деятельности, а **из** материальной деятельности. В психическую деятельность входят не только идеальные предметы (представления, понятия), но и идеальные действия, операции. Первичным, материальным для образов (представлений, понятий и др.) являются внешние предметы. В качестве первичного для новых психических действий выступают внешние материальные действия субъекта» [128, с.14].

Реализуя технологию деятельностного обучения математике, мы исходим из того, что практическая деятельность и психическая деятельность учащихся есть «**две формы единого — деятельности**. При этом психическая деятельность есть порождение внешней, практической. Эти две формы деятельности связаны между собой взаимопереходами, взаимопревращениями. Внутренняя, психическая деятельность постоянно включает в себя элементы внешней, а внешняя, практическая – элементы психической деятельности» [Там же]. Отсюда, в частности, следует то, что «понятие не может быть передано учащимся в готовом виде, они должны получить его сами, взаимодействуя с относящимися к нему предметами» [Там же, с. 194]. Именно поэтому, например, при введении нового понятия *действие определения* должно быть реализовано операциями:

- выделение родового понятия и видовых отличий (реализуемое приемом отбора или конструктивным приемом [100, с. 20–21]);
- введение термина и обозначения (если оно предусмотрено);
- формулировка определения в текстовой и знаковой форме (символическая запись определения).

Так, при введении понятия «арифметический квадратный корень из числа» словесная формулировка определения обязательно должна сочетаться с математической записью: $\underline{\sqrt{a}} = b \xleftrightarrow{def} \underline{\text{число}}\, b$: $1)\, b \geq 0$; $2)\, b^2 = a$. Это результат внутренней деятельности — действия «определение понятия», это и материализованная «внешняя речь», обладающая большей наглядностью и поэтому воздействующая и на органы чувств (зрение), и на мышление (структурность записи).

Аналогично следует действовать при изучении степени с натуральным показателем, логарифма, арксинуса числа, арифметической прогрессии, возрастающей функции и других понятий алгебры. Приведем текстовые и соответствующие им математические записи определений перечисленных выше понятий.

Определение 1. $\underline{a^n}$, $n \in \mathbf{N},\ n > 1 \xleftrightarrow{def} 1)\ \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$

$$2)\ a^1 = a.$$

*<u>Степенью числа **a** с натуральным показателем n, большим</u>* **<u>1</u>**, называется <u>произведение *n* множителей</u>, каждый из которых равен *a*. *<u>Степенью числа **a** с показателем</u>* **<u>1</u>** называется *<u>само число **a**</u>* [3, с. 75].

Определение 2. $\mathbf{log}_a\, b = \mathbf{x}, b > 0, a > 0, a \neq 1 \xleftrightarrow{def}$ *показатель* $\mathbf{x} : a^{\mathbf{x}} = b$.

<u>Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от</u> <u>1 основанию *a*</u> называют <u>показатель степени</u>, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b* [82, с. 288].

Определение 3. $\mathbf{arcsin}\, a = \underline{x} \xleftrightarrow{def} \underline{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, причем $\sin \underline{x} = a.$

<u>Арксинусом числа a</u> называется такое <u>число *x*</u> из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен *a* [3, с.62].

Определение 4

$y = f(x)$ *возрастающая на* $[a,b]$ *функция* $\xleftrightarrow{def} \left((x_1, x_2 \in [a,b])(x_1 > x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right).$

<u>Функция</u> называется *<u>возрастающей на некотором промежутке</u>*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции [5, с.11].

Определение 5

$y = f(x)$ – возрастает на $\mathbf{P} \xleftrightarrow{def} (\forall x_1, x_2 : (x_1, x_2 \in \mathrm{P}))((x_1 > x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$

*<u>Функция **f** возрастает на множестве</u>* **<u>P</u>**, если для любых x_1 и x_2 из множества **P**, таких, что $x_1 > x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ [2, с. 39].

Итак, текстовая, словесная формулировка определения понятия не может быть единственной формой его представления. Идея использования математической символики при изучении определений математических понятий и вообще применение символики математических записей в школьном обучении обсуждается давно в методике преподавания математики [6, 19, 75]. Однако широкого распространения в традиционном обучении она не получила. Деятельностный подход к обучению математике, принцип единства внешней и внутренней деятельности ориентирует на создание многогранного образа изучаемого объекта: словесного описания; символа (рисунка) и формулы – определения. Конструкция формулы–определения включает определяемое и определяющее понятия; в определяющем понятии выделены родовое понятие и видовые отличия. Обобщение словесных формулировок определений математических понятий, например приведенных выше, позволяет говорить о следующей структуре определения: «*Определяемое понятие* (в творительном падеже) – называется *определяющее понятие* (в именительном падеже)»**.**

При введении определений геометрических понятий, как правило, чертеж (рис. 7) должен сопровождаться символической записью:

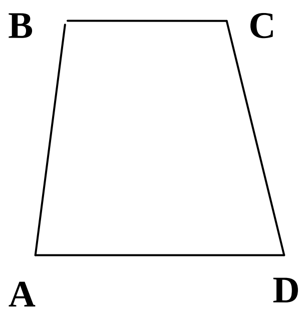


Рис. 7

Трапеция $ABCD \xleftrightarrow{def}$ четырехугольник:

$$1)\ AD \parallel BC;\ 2)\ \overline{AB \parallel CD}.$$

Как правило, именно выделенные родовое понятие и видовые отличия применяются в дальнейшем обучении при решении задач и доказательствах теорем.

Особых требований к символической записи определений нет, поэтому возможны различные варианты. Выше представлен пример определения трапеции, в котором использован алфавит школьного математического языка (см. с. 59). Иногда используют алгоритмизированную форму определения. Для понятия «трапеция» это выглядит следующим образом:

«Трапеция $\Leftrightarrow$ 1. Четырехугольник. 2. Есть две параллельные стороны. 3. Есть две непараллельные стороны. 4. Выполняются все свойства одновременно» [76, с. 124].

В нашем исследовании используется фиксация определения понятия символической записью, являющейся наглядным средством для выполнения таких действий, как подведение под понятие, выведение следствий из определения понятия, действий поиска плана доказательства утверждения или решения задачи, проведения дедуктивного рассуждения. Наконец, соотнесение символической записи определения понятия и его текстовой формулировки (с. 40) показывает, что словесное описание является, по сути, переводом математической записи на естественный (русский) язык. Поэтому в усвоении определения понятия его символическая форма имеет огромное значение.

То же относится к изучению вопросов, связанных с другой формой мышления — суждением. Обучение доказательству математических утверждений невозможно без получения учащимися знаний о логической структуре математических предложений и доказательств (см. гл. 3). Уже при изучении первых теорем геометрии необходимо, чтобы школьники представляли себе структуру математического доказательства, а не заучивали его как прозу. Выше при изложении структуры понятия «деятельность» (с. 10) приведено дедуктивное рассуждение — доказательство свойства медианы равнобедренного треугольника. Эта конструкция убедительно показывает структуру доказательства: *выведение* из условия теоремы (задачи) её заключения (или требования) посредством фактов изученной теории. Тексты доказательств, приведенные в школьных учебниках, кратки, их лаконичность основана на использовании синтетического метода и вполне понятна цель его применения в учебном тексте. При организации учебной деятельности, диалога с учащимися жанр учебного текста не подходит.

Это тем более касается решения первых геометрических задач[2]. Приведем в качестве примера задачу первого раздела курса планиметрии.

Задача 1. Определите длину стороны BC треугольника ABC, если точка K принадлежит стороне BC, а длины отрезков BK и CK равны соответственно 3 с*м* и 4 *см*.

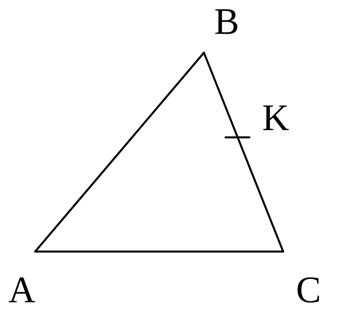


Рис. 8

Дано: $\Delta\ ABC$; $K \in [BC]$; $|BK| = 3$ *см*, $|CK| = 4$ *см*.

Определить: $|BC|$.

Приведем решение задачи – дедуктивное рассуждение, в котором «малые посылки» — данные задачи, последнее заключение — искомое (табл. 2).

[2] Задачи аналогичные первым геометрическим задачам ученики решали в 5–6 классах при изучении геометрических фигур. Однако требование строгого обоснования их решения не являлось обязательным.

Таблица 2

Малая посылка (*условие*)	Большая посылка (*обоснование*)	*Заключение*
$\Delta\ ABC$	определение треугольника	BC – отрезок
BC – отрезок; $K \in [BC]$	аксиома измерения отрезка	$\lvert BC\rvert = \lvert BK\rvert + \lvert KC\rvert$
$\lvert BK\rvert = 3$ *см*, $\lvert CK\rvert = 4$ *см*, $\lvert BC\rvert = \lvert BK\rvert + \lvert KC\rvert$	нахождение значения выражения	$\lvert BC\rvert = 7$ *см*

Ответ: $\lvert BC\rvert = 7$ *см.*

Точно так же, как в определениях математических понятий и решении задач, принцип единства внешней и внутренней деятельности ориентирует на создание многогранного образа свойства изучаемого объекта. Словесное описание свойства — формулировка теоремы в умственном плане, во внутренней деятельности, как правило, конкретизируется рисунком и символической записью теоремы с четким выделением ее условия и заключения.

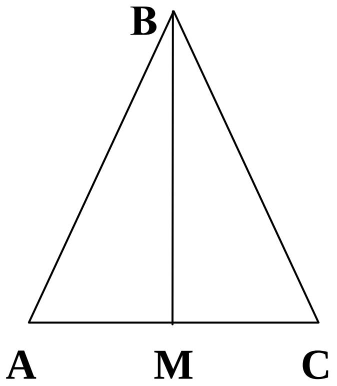


Рис. 9

Дано:

ΔABC – равнобедренный,

$[AC]$ – основание, $[BM]$ – медиана.

Доказать:

$[BM]$ – биссектриса ΔABC.

Причем в условии не должно быть элементов доказательства (заключений силлогизмов), иначе появляется многозначность толкования категорий «условие», «заключение» и «доказательство» теоремы.

Принцип единства внешней и внутренней деятельности, с одной стороны, ориентирует на выведение следствий определений равнобедренного треугольника и медианы треугольника в результате восприятия условие теоремы. Возникающий на основе этого восприятия синтез знаний позволяет выстроить дедуктивное рассуждение (см. табл. 1, с. 14). С другой стороны, если внутренняя синтетическая деятельность не актуализируется, то сформированное действие поиска доказательства и принцип единства деятельности направляют сознание школьника на создание модели поиска способа доказательства (идеальной или материализованной). Словесного описания этой модели, имеющей место в диалоге учителя и учащихся, для *овладения* действием поиска недостаточно. Необходима невербальная поддержка, способствующая концентрации внимания учащихся на этом процессе, позволяющая создать образ явления в сознании детей. Приведем пример материализованной модели поиска доказательства рассмотренного выше свойства медианы равнобедренного треугольника — рассуждения, осуществляемого методом восходящего анализа:

$([BM]$ – биссектриса $\Delta ABC) \Leftarrow (\angle ABM = \angle MBC) \Leftarrow (\Delta ABM = \Delta CBM) \Leftarrow$

$$\Leftarrow ([AB]=[BC],\ \angle A = \angle C,\ [AM]=[MC])$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

ΔABC –равнобедренный, $[AC]$ – основание $\qquad$ $[BM]$ – медиана

Реализация принципа единства внешней и внутренней деятельности особенно важна в процессе решения задач. Рассмотрим пример текстовой арифметической задачи. Вербального описания задачной ситуации, как правило, появляющейся в диалоге учителя и учащихся, для понимания задачи *каждым* учащимся недостаточно. Нужна наглядная модель (рис. 10). Приведем пример.

Задача. *Скорость катера в стоячей воде* 24,6 *км/ч, скорость течения реки* 2,2 *км/ч. Катер отошёл от пристани и пошёл по течению реки. Через* 1,5 *часа он повернулся обратно, прошёл против течения* 1,5 *часа и остановился. На каком расстоянии от пристани он остановился?*

Скорость катера 24,6 $\frac{\text{км}}{ч}$

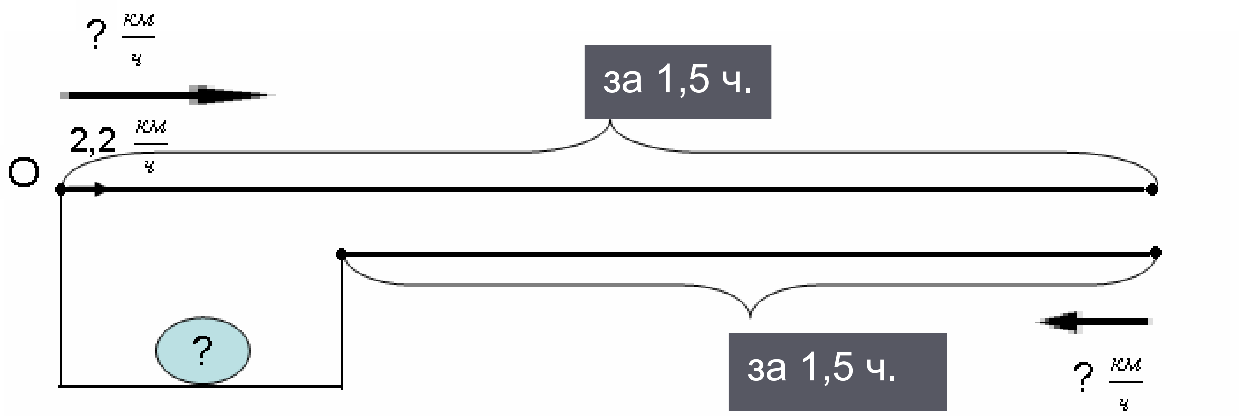
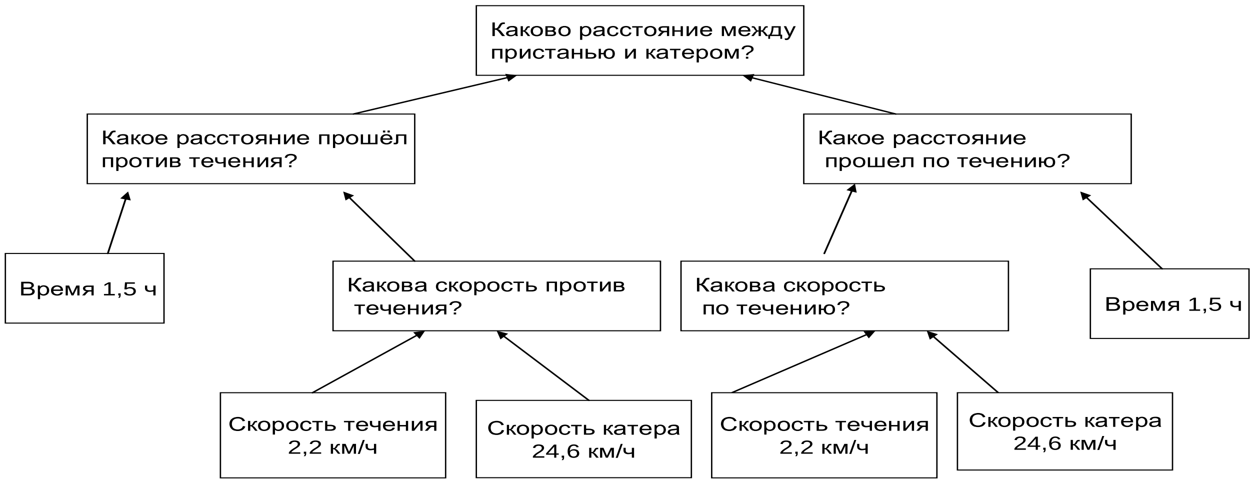


Рис. 10

На рисунке 10 приведена материализованная модель задачи, способствующая ее пониманию, привлекающая непроизвольное внимание учащихся, помогающая активизации поиска плана решения задачи.

Другая не менее важная материализованная модель процесса решения задачи — схема поиска способа решения, представляющая собой рассуждение, осуществляемое методом восходящего анализа:



Таким образом, в данном исследовании является исходным признание ведущим фактором осуществления деятельностного подхода в обучении математике (наряду с мотивацией) предмета познавательной деятельности. На наш взгляд, в исследовании проблемы реализации деятельностного подхода при обучении математике недостаточно глубоко использованы сущность и роль логико-операционной стороны научного знания. Поэтому главный акцент при исследовании предмета познавательной деятельности сделан на процессуальном аспекте — форме «научного знания» при обучении математике в средней школе. Описанные выше результаты являются основой одного из путей реализации деятельностного подхода при обучении математике. Они позволили выполнить разработку дидактических средств, направленных на решение поставленной методической задачи.

ГЛАВА 3. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

Истина все же скорее возникает из ошибки, чем из спутанности.
Ф. Бэкон

3.1. Понятие как категория логики

3.1.1. Содержание и объем понятия, определение

Состав действий деятельности «введение понятия» может быть обоснован методологическим содержанием предмета деятельности – понятия. Вопрос о понятиях и их определениях имеет разные аспекты изучения: гносеологический, логический, содержательный (предметный) и др., поэтому является трудным, по сути. В исследованиях следует корректно использовать понятийный аппарат, поэтому необходимо кратко изложить результаты анализа логических знаний о понятии как форме мышления.

Во-первых, в понятии «*отражены существенные (отличительные) свойства объектов изучения… Содержание понятия* — это множество всех существенных признаков данного понятия. *Объем понятия* — множество объектов, обладающих всеми этими признаками. Так, для понятия «параллелограмм» содержание будет представлено такими, например, свойствами: 1) противоположные стороны конгруэнтны; 2) противоположные углы конгруэнтны; 3) диагонали в точке пересечения делятся пополам и т.д.» [75, с. 67].

Пусть имеем понятие P и его существенные признаки $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$. Тогда содержанием понятия P является множество C_P такое, что $C_P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Объем понятия – это множество объектов, обозначим его **P**, обладающих всеми признаками (p_i), составляющими содержание понятия.

Во-вторых, в математике рассматривают понятия двух видов: понятие об *объекте* и понятие об *отношении*. Например, понятие «больше» характеризует *отношение* между элементами числового множества, «перпендикулярность», «параллельность» — отношения между прямыми. Примерами математических *объектов* являются конкретные вертикальные углы, например, AOD и BOC (рис. 11), конкретное квадратное уравнение $3x^2 + 5x - 8 = 0$, конкретный ромб.

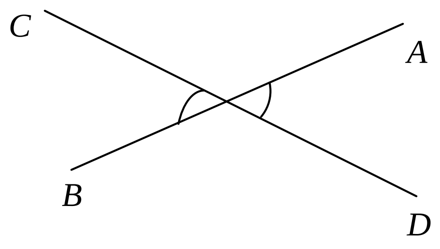


Рис. 11

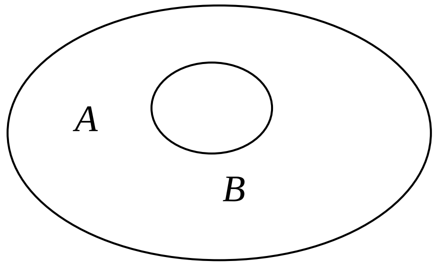


Рис. 12

В-третьих, два понятия *A* и *B*, имеющие объемы A и B соответственно (рис. 12), могут находиться в родо-видовой связи. Если B$\subset$A, то понятие *A* называют родовым для *B,* а понятие *B* — видовым для *A*. Понятие «два угла» — родовое для понятия «вертикальные углы», а понятие «вертикальные углы» — вид пары углов. Ясно, что видовое понятие обладает всеми признаками родового понятия. Более того, родовое понятие задает один из существенных признаков видового понятия, входящий в его содержание. Например: «два угла» — родовое понятие для «вертикальных углов» и, с другой стороны, существенный признак понятия «вертикальные углы».

Наконец, над понятиями как объектами (или отношениями) выполняются *логические операции*: подведение под понятие, определение понятия, классификация и обобщение понятия. Рассмотрим сущность каждой из них. Установление принадлежности (или непринадлежности) объекта объему данного понятия — логическое действие *подведение под понятие* (распознавание понятия). Использование введенных выше обозначений (с. 47) позволяет на символическом языке описать операцию подведение под понятие. Если объект a не обладает хотя бы одним из p_i, где $p_i \in C_P$, то $a \notin \mathbf{P}$ (a не есть P). Если объекту b присущи все свойства p_i, то $b \in \mathbf{P}$ (b есть P) [25].

«Определить объект — это значит выбрать из его *существенных*[3] свойств такие и столько, чтобы каждое из них было необходимо, а все вместе достаточны для отличия изучаемого объекта от других» [68, с. 39]; *классификация* – вид

[3] Слово «существенный» выделено автором монографии. Ниже будет показана избыточность данного определения, использующего указанный термин.

деления объема родового понятия на подмножества объектов, составляющих объемы видовых понятий. «Классификацией понятия называется процесс выяснения его объема» [75, с. 70]. *Обобщение* – переход от видового понятия к родовым понятиям посредством мысленного выделения некоторого свойства множества объектов.

Таким образом, *предмет познавательной деятельности*, связанной с овладением понятиями, включает в себя следующие категории. Это объект (отношение); понятие как форма мышления; существенные и несущественные свойства (признаки) понятия; определение понятия как предложение; объем и содержание понятия; родовые и видовые понятия. Кроме того, в предмет этой деятельности входят логические операции: подведение под понятие, определение понятия, классификация и обобщение понятия.

Первый вопрос, который требует уточнения в целях данного исследования (для реализации деятельности по введению понятия), — толкование исходной категории: «существенные свойства» или «существенные признаки». Сначала следует понять, что такое «свойство», «признак», далее — что значит «существенное свойство».

В словаре русского языка С.И. Ожегова «ПРИЗНАК – показатель, примета, знак, по которым можно узнать, определить что-либо» [90, с. 589]. Ясно, что параллельность *двух сторон* четырехугольника – признак и трапеции, и параллелограмма. Без него не могут существовать эти фигуры — математические объекты. Этот признак («знак, примета» объекта) существенный (отражает сущность) и необходимый. Но он не является достаточным, потому что при наличии его у объекта – четырехугольника – нельзя с уверенностью назвать вид этого четырехугольника. *Узнать, выделить* параллелограмм среди четырехугольников позволяет «параллельность двух пар сторон четырехугольника», а также «параллельность и равенство пары сторон четырехугольника»; «равенство двух пар противоположных сторон четырехугольника» и другие действительно *признаки* параллелограмма в истинном смысле слова. Таким образом, признаком[4] параллелограмма (и вообще любого понятия) является *необходимое и достаточное условие* [75] параллелограмма (понятия). Представляется, что использование термина «признак» в нескольких аспектах (даже в двух указанных выше) вносит трудности в изложение теоретических вопросов методики преподавания математики. Далее: «Свойство – качество, признак, составляющий отличительную черту чего-нибудь» [90, с. 703]. Значит, термины «признак»[5] и «свойство»[6] синонимы. Однако, например, из словаря синонимов русского языка это не следует.

Прилагательное «существенный» – «составляющий сущность чего-нибудь, важный, необходимый». Сущность – «то же, что суть, внутреннее содержание чего-нибудь» [Там же, с.780]. И снова — существенный, значит, важный, *необходимый*. То есть объект, не обладающий существенным свойством некоторого понятия, не является элементом множества — объема данного понятия. Так, параллельность двух сторон четырехугольника – необходимый признак параллелограмма, его существенный признак, но не является достаточным признаком.

Таким образом, ответом на первый поставленный вопрос будет вывод из вышеизложенных аргументов. Целесообразно считать термины «признак» и «свойство», а также «существенный признак» и «необходимый признак» синонимами.

Второй вопрос, требующий уточнения, — сущность категорий «содержание понятия», «определение понятия». Для выполнения анализа представим кратко необходимые сведения о понятии как форме мышления, изложенные в курсах методики преподавания математики. В учебном пособии авторов Ю.М. Колягина, В.А Оганесяна и других четко сформулировано: «Перечисление необходимых и достаточных признаков понятия, сведенных в связное предложение (речевое или символическое), есть *определение понятия* (математического

[4] Понятие «признак» в данном изложении отличается от термина, используемого в школьном курсе математики в качестве названия некоторых теорем.
[5] ПРИЗНАК, примета, знак, симптом, показатель [Словарь синонимов русского языка, 1975, с. 414].
[6] СВОЙСТВО, см. качество [Там же, с. 481]. КАЧЕСТВО, свойство, черта, особенность, штрих, принадлежность, атрибут [Там же, с. 192].

объекта). Каждый из признаков, входящих в определение, должен быть необходим, а все вместе — достаточны для установления данного понятия. В определении должно раскрываться основное содержание понятия» [75, с. 68].

В учебных пособиях под редакцией Е.И. Лященко читаем: «Сформировать понятие об объекте — это значит раскрыть все существенные свойства объекта в их целостной совокупности» [68, с. 39]. В другом пособии: «Определить понятие или дать его определение — это значит выполнить такую логическую операцию, при помощи которой раскрывается *содержание* вводимого понятия. Содержание понятия — это *совокупность* существенных признаков, отраженных в данном понятии» [67, с. 70]. Как видно из цитируемых источников, налицо смешение толкования задач «сформировать понятие» и «определить понятие».

В курсе лекций по педагогике математики А.А. Столяра: «Каждое понятие объединяет в себе множество объектов или отношений (*объем* этого понятия) и характеристическое свойство, присущее всем элементам этого множества и только им (*содержание* понятия). Например, понятие «треугольник» соединяет в себе множество всевозможных треугольников (объем этого понятия) и характеристическое свойство — наличие трех сторон, трех вершин, трех углов (содержание понятия)… Содержание понятия раскрывается с помощью определения…» [126, с. 127].

В современных учебных пособиях для студентов об этом говорится так: «Всякое понятие объединяет в себе множество объектов или отношений (объем понятия) и совокупность существенных свойств, присущих всем элементам этого множества и только им (содержание понятия). Другими словами, существенные свойства — это такие, каждое из которых *необходимо*, а все вместе достаточны для характеристики объектов, принадлежащих понятию. Содержание понятия «треугольник» — наличие трех сторон, трех вершин, трех углов» [113, с. 50]. В другом пособии: «Существенные свойства составляют содержание понятия. *Существенными свойствами* понятия (разные авторы называют их по-разному: существенными признаками, характеристическими свойствами) называются такие, каждый из которых *необходим*, а все вместе достаточны, чтобы выделить определенный класс объектов, чтобы некоторый объект отнести к определенному понятию» [20, с. 6].

Приведенные описания сущности понятий и их определений, а также вспомогательных категорий, необходимых для этого описания, показывают ряд противоречий, требующих разрешения.

Во-первых, обнаруживаются разночтения в толковании «содержания понятия». Это и *множество* всех существенных признаков [75, с. 67], и одно *характеристическое* свойство [126, с. 127], и некоторая *совокупность* существенных свойств [113, с. 50]. Даже небольшое количество анализируемых источников показывает неоднозначность трактовки «содержание понятия» в учебных пособиях. Это вряд ли хорошо с научной точки зрения, т.к. может приводить к противоречиям. Однозначность толкования методической (логической) категории «содержание понятия» не позволит приходить к противоречиям и, следовательно, допускать ошибки. Приведем пример.

Объект (понятие P) «вертикальные углы» отличают от других такие существенные свойства (признаки), как:

– наличие общей вершины (p_1);

– их число – два угла (p_2);

– стороны одного являются продолжениями сторон другого (дополнительными лучами сторон другого) (p_3);

– равенство углов (p_4) и др.

Таким образом, существенными признаками понятия P – «вертикальные углы» являются свойства p_1, p_2, p_3, p_4. Тогда содержанием понятия (согласно первой из указанных выше точек зрения) является множество C_P : $C_p = \{p_1, p_{2,} p_3, p_4\}$. Объем понятия P — это множество объектов, обозначим его **P**, обладающих всеми признаками (p_i), составляющими содержание понятия. Такое понимание действия *подведение под понятие* не приводит к противоречию, полученному при анализе работы учащихся с определениями понятий [128]. Утверждение о том, что «должны признать вертикальными … углы AOD

и угол, дополнительный к углу *COB*» [128, с. 196] (рис. 13), поскольку им присущи первые три свойства p_1, p_2, p_3, неверно. Свойство p_4 (углы равны) принадлежит содержанию понятия «вертикальные углы», а выделенные углы этим свойством не обладают.

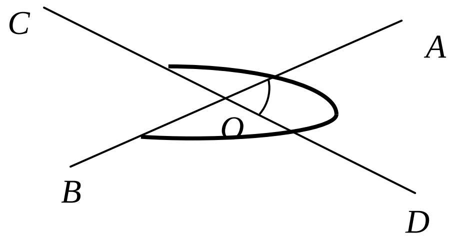


Рис. 13

Если говорить о «подведении под определение» (под определяющие признаки), то следовало учитывать существенный признак понятия «угол» – градусная мера угла больше 0° и не больше 180° [101, с. 12]. Все существенные свойства понятия «угол» изучены до введения вертикальных углов.

Как видно из проведенного анализа, терминология, связанная с понятием, его содержанием и объемом, может быть значительно унифицирована. Будем говорить о признаках (свойствах) понятий, существенных[7] и несущественных. Отвечая на второй поставленный вопрос, будем считать, что *содержанием понятия* называется совокупность всех существенных признаков понятия. *Определить понятие* — это значит выбрать его существенные свойства так, чтобы все вместе они были достаточны для отличия объектов изучаемого понятия от других. *Определение понятия* (математического объекта) — предложение (речевое или символическое), в котором перечислены существенные признаки, все вместе достаточные для отличия объектов изучаемого понятия от других. В *определении* должно раскрываться *основное содержание* понятия. В структуре определения понятия выделяют *определяемое понятие*, обозначенное новым термином, и *определяющее понятие* — достаточную совокупность существенных признаков.

В примерах определений понятий, представленных в текстовой и символической формах (с. 41 данной работы), выделены определяемые и определяющие понятия. Так, определяющим понятием «степени с натуральным показателем, большим 1» является совокупность следующих существенных призна-

[7]Существенный – значит, необходимый [90] (см с. 50 данной работы). Термин «необходимый» использовать не будем в сочетании с термином «существенный», как это встречается в литературе, например, [20, с. 6].

ков: произведение множителей *a* (чисел, переменных); количество множителей равно *n*; каждый из множителей есть *a*.

3.1.2. Логические действия над понятием

Математика — это классификация и
изучение всех возможных закономерностей.
У.У. Сойер

Рассмотренные выше два вопроса относятся к логическому действию «определение понятия». Сущность другого логического действия — «подведение под понятие», методика его формирования достаточно подробно представлена Н.Ф. Талызиной [128, с. 196]. Поэтому далее остановимся подробнее на действиях «классификация понятия» и «обобщение понятия».

Классификация понятия как действия, направленного на овладение понятием, в контексте с введением нового понятия в курсах методики преподавания математики не выделяется [20, 40, 41, 68, 75, 113, 126]. Поэтому в данном исследовании, реализуя деятельностный подход в обучении, мы рассматриваем классификацию понятия как действие, которым должен владеть каждый школьник при работе с математическими понятиями. Классификация понятия выполняется сразу при введении понятия, после его определения и первичного усвоения понятия посредством действий подведения под понятия и выведения следствий или иногда в ходе мотивации деятельности «введение понятия». Значение этого действия в структуре деятельности «введения понятия» достаточно убедительно характеризует Н.Ф. Талызина, например, в статье «Что значит знать?» [127].

Классификационные схемы того или иного понятия, иллюстрируя многообразие видов данного понятия, показывают учащимся перспективу изучения предмета, с одной стороны, а с другой – обращение к ним способствует формированию *системы* знаний, представлений о родовых и видовых понятиях.

Приведем примеры классификации понятий. Например, классификация понятия «угол» по основанию «сравнение меры угла с 90°» может быть выполнена учащимися седьмого класса уже в начале изучения курса геометрии делением на острые, тупые, прямой и развернутый. Однако, несмотря на то что эти виды углов в учебниках выделяются, явная классификация не проводится.

Приведём примеры классификационных схем понятия «треугольник»:

а) основание классификации — виды углов треугольника (рис. 14):

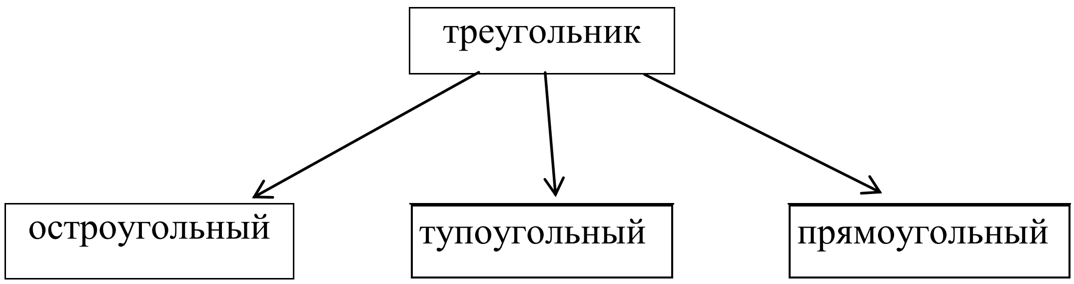


Рис. 14

б) основание классификации — наличие равных сторон (рис. 15):

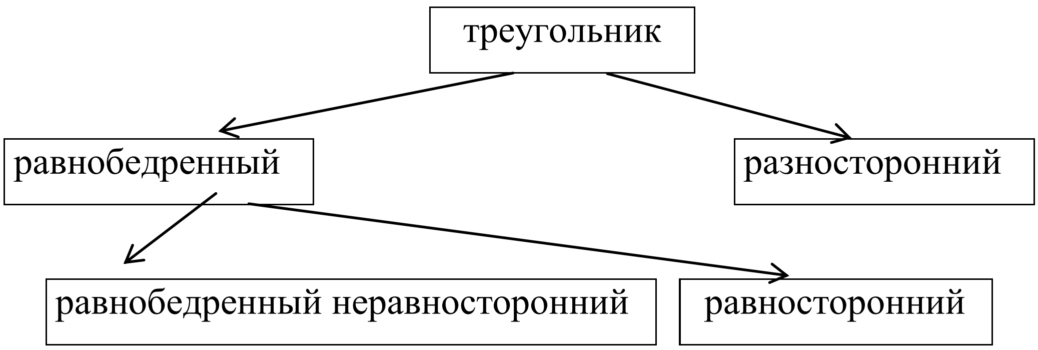


Рис. 15

Классификация понятия «многоугольник» проста (рис. 16), но в традиционном курсе геометрии также явно не рассматривается.

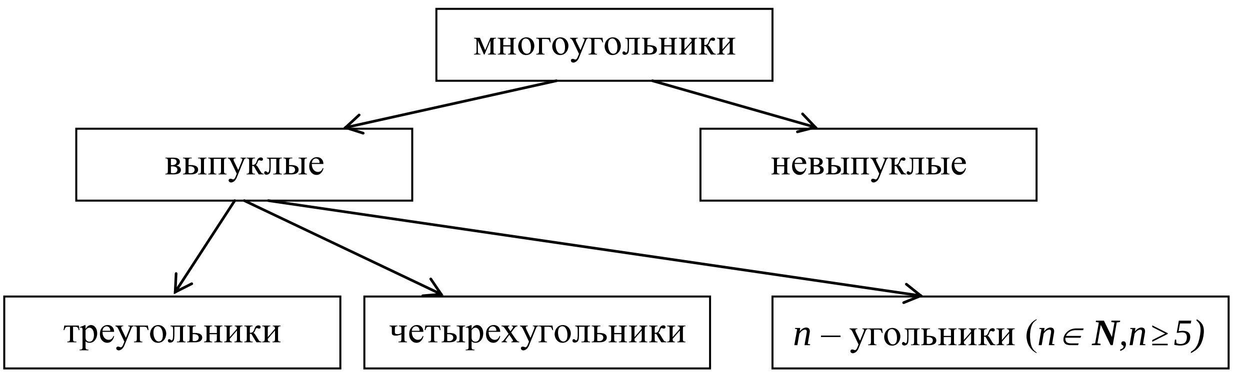


Рис. 16

Важнейшее понятие курса алгебры «выражение» может быть классифицировано различными способами [67, 126]. Один из них приведен на рис. 6 (с. 37).

Если логическим действием классификации понятия его объем делится на подмножества — виды понятия, то *обобщение* как мысленное выявление некоторых свойств объектов, объединяющих их, и переход на более высокую ступень абстракции позволяет выполнить восхождение от частного понятия к общему. Так, обобщением понятия степени с натуральным показателем является понятие степени с действительным показателем. В этом случае говорят об обобщении понятия путем *расширения числового множества.* При изучении арифметической прогрессии задаётся первый член прогрессии a_1 и разность d. Можно найти каждый член прогрессии, прибавляя к предыдущему число d:
$a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + d \cdot 2$, $a_4 = a_1 + d \cdot 3$ и т.д. Выявление закономерности получения каждого последующего члена позволяет получить формулу $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, где число n – это переменная, которая представляет номер искомого элемента. В данном случае говорят об обобщении понятия путем *замены констант переменной.* При изучении понятий $\sin x$, $\cos x$ и т.п. сначала рассматриваются синус, косинус острого угла, затем — мерой угла от 0° до 180°, далее вводится понятие угла поворота, два направления поворота. В подобных случаях говорят об обобщении понятия путем *отказа от ограничений*.

Обобщение помогает сохранить количество необходимой информации, заменяя знания множества сходных случаев знанием общего принципа. Как научный метод обобщение является эффективным приёмом открытия фактов, поиска доказательства теоремы, способа решения задачи, а также используется при изложении знаний в школьном курсе математики. В деятельности «введение понятия» действие обобщения применяется в случае индуктивного изложения содержания обучения математике. Например, при введении таких понятий, как степень с натуральным показателем, арифметический квадратный корень выполнение действия обобщения понятия позволяет раскрыть перспективу изучения алгебры, показать идеи построения фрагментов математической теории. Понимание сущности строения теории, перспектив изучения предмета формирует положительное отношение к учению — мотивацию учащихся.

«Выведение следствий определения» как логическое действие отмечается в некоторых учебных пособиях по методике обучения математике в школе [68, 130, 152 и др.].

3.1.3. Понятие «уравнение» с логической точки зрения

Как известно, уравнение – центральное понятие математики. В методике преподавания математики одной из четырех основных алгебраических линий школьного курса алгебры выделена линия уравнений и неравенств [88, 107]. Уравнение как простейшая математическая модель широко используется в решении задач. Поэтому проверка знаний по многим темам школьного курса математики (например, задания части С итоговой аттестации) сводится к решению уравнений. Однако приходится констатировать, что, несмотря на большое внимание, уделяемое изучению теории уравнений в школе, результаты овладения этими знаниями крайне низкие. Причины затруднений учащихся самые разные. Это предмет отдельного исследования. Проблема реализации деятельностного подхода к обучению математике должна решить в обозримом будущем и эту частную задачу. В целях данного исследования выполним в основном анализ введения понятия уравнения с точки зрения реализации деятельностного подхода к обучению.

В школьном курсе математики уравнения служат для задания функции, геометрической фигуры (прямой, окружности и т.п.). Однако понятие уравнения не определяется, а вводится *поясняющим описанием* и в пятом, и в седьмом классах как равенство с переменной (неизвестным) [3, 37, 71 и др.].

В методике преподавания математики обозначились несколько подходов к введению понятия уравнения в начале курса алгебры средней школы. Первый, более ранний, относится к 60-м годам прошлого столетия [30]. Систематическое изучение уравнений осуществлялось при изучении уравнений с одним неизвестным. Введение понятия рекомендовалось начинать с вопроса о равенствах, обратив внимание учеников на то, что им приходилось много раз встречаться с такими формулами, в которых два алгебраических выражения соединены знаком равенства. «Два алгебраических выражения, соединенные знаком равенства, принято называть равенством» [30, с. 378]. Далее детально изучались численные (арифметические) равенства. «Равенства, в которых содержатся только известные числа, называются численными или арифметическими. Для проверки арифметического равенства проводят вычисления левой и правой частей равенства» [66, с.378]. Учащимся предлагались примеры, в которых требовалось сделать достаточно сложные вычисления.

После усвоения понятия арифметических (в современных учебниках — числовых) равенств рекомендовалось «показать ученикам, что совсем иначе обстоит дело с равенством, содержащим буквенные выражения» [Там же]. На примерах таких равенств ученики подводятся к осознанию того, что эти равенства могут оказаться верными при одних значениях букв и неверными при других значениях букв, входящих в равенство. Кроме того, рассматриваются примеры равенств с одной буквой, верных при единственном ее значении и неверном при всех других значениях. Наконец, рассматриваются равенства, которые становятся бессмысленными при некоторых значениях букв, входящих в них:
$ax + 8 = 17$ теряет смысл при a равном 0, так как сумма $0{\cdot}x + 8$ не равна 17 ни при каком x. Далее изучается понятие тождества и его частный вид — арифметические равенства. И только после всего вышеперечисленного возможно введение понятия об уравнении как равенстве.

Другой подход основан на понятиях логики и теории множеств. И неслучайно. Обратимся к определению уравнения в математике. «Пусть на множестве **M** зафиксирован набор алгебраических операций, x – переменная на **M**; тогда уравнением на множестве **M** относительно x называется предикат вида $a(x) = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – термы относительно заданных операций, в запись которых входит символ x» [19, с. 107]. Определив уравнение как предикат, необходимо выяснить, каким правилам подчиняются операции над уравнениями. Как известно, это операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и др. «Для решения уравнений особенно важно понимать смысл полученного после очередного преобразования уравнения, т.е. будет ли новое уравнение с тем же множеством решений или множество решений изменилось. С этой целью вводится понятие равносильных уравнений» [67, с. 175].

Принятым в логике терминам «терм» и «предикат» соответствуют термины школьной математики «выражение» и «предложение с переменной». Наиболее близка к приведённому формальному определению уравнения следующая формулировка: «Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением» [77, с. 107].

Понятие «выражение» можно определить в школе как конечную совокупность символов алфавита математического языка, имеющую смысл. Для арифметико-алгебраических выражений это означает, что оно должно иметь числовое значение. Дихотомическая классификация понятия «выражение» (см. с. 37) приводит к выделению подмножества «уравнения». Описание объектов этого множества — суть определения уравнения. «Выражение с переменной, содержащее знак отношения, принято называть … логической функцией или уравнением (неравенством)» [67, с. 174]. Или другая формулировка определения, используемая некоторыми учителями: «Выражение с переменной, содержащее знак «=», называется уравнением» [16, с. 198].

Как следует из проведенного анализа, чтобы определить понятие «уравнение» подобным образом, должен быть введен алфавит школьного математического языка для введения понятия «выражение». В методике обучения математике исследования в этом направлении давно проведены: для введения понятия «выражение», а затем и «уравнение». Рассматривается алфавит школьного математического языка, представляющий собой конечное множество символов (цифры, буквы латинского и русского алфавита, знаки действий и отношений и др.):

$$A = \{0,1,2,...,9, А, Б,..., Я, а, б,..., я, a, b, c,..., y, z,..., "+",..., ":", "=",..., (),..., \{\}, \varnothing,...\}.$$

Причем отмечается, что язык школьного предмета математики должен удовлетворять синтаксическим и семантическим требованиям [67].

Современные программы обучения математике в начальной школе и пропедевтическом курсе математики располагают такой базой [37, 146 и др.]. Опыт преподавания по современным учебникам развивающего обучения «Школа 2000…» [37, 38], по комплекту учебников алгебры А.Г. Мордковича [79], реализующих деятельностный подход в обучении, показывает возможность введения алфавита математического языка и, следовательно, определения понятия выражения и уравнения (неравенства).

В современных учебниках для средней школы не выдержан ни один из описанных выше подходов. В учебниках и для пятого, и для седьмого классов характерно введение понятия уравнения как *равенства с переменной* (неизвестной). Во-первых, отметим, что термин «уравнение» ученики узнают в начальной школе, как, впрочем, и многие другие математические термины, обозначающие понятия. Некоторые из них определяются в пропедевтическом курсе математики [37, 38], другие — в систематических курсах алгебры и геометрии.

В наиболее популярном учебнике для пятого класса уравнение вводится как теоретическое сведение, которое «надо знать наизусть» [71, с. 6]. Как известно, наизусть следует знать определения понятий, формулировки правил (алгоритмов), аксиом и теорем. Таким образом, предложению: «Уравнением называют равенство, содержащее букву, значение которой надо найти» [71, с. 83] негласно присвоен статус[8] определения понятия. Ниже, как следствия этого предложения, можно рассматривать выделенные формулировки того же статуса: «Значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство, называют **корнем** уравнения» и «**Решить уравнение** — значит найти все его корни (или убедиться, что это уравнение не имеет ни одного корня)».

С точки зрения деятельностного подхода к обучению введению понятия должна предшествовать мотивация, осуществляемая отделением знания от незнания. Мотив как опредмеченная потребность возникает в проблемной ситуации [74], являющейся источником действия, побуждением к нему. Мотивацией к познанию того, какой математический объект является уравнением, нельзя признать задачу с фабулой о чашечных весах. На левой чаше весов, на-

---

[8] Мы понимаем субъективность нашего мнения по этому поводу. Однако проводим анализ введения понятия по данному пособию, поскольку методика введения практически не изменяется и в систематическом курсе алгебры [3].

ходящихся в равновесии, лежит арбуз и гиря в 1 кг, а на правой чаше — гиря в 5 кг, и найти следует массу арбуза. Эта задача, приводящая к равенству $x + 1 = 5$, служит *мотивировкой*, иллюстрацией примера практической ситуации, моделью которой является уравнение, но не создает мотива к введению понятия (сегодня уравнения ученики решают с начальной школы). Это с одной стороны.

С позиции анализа структуры предложения (определения) родовое понятие и видовые отличия вводимого понятия должны быть сформированы, усвоены учащимися ранее. В анализируемых учебниках описательно вводятся понятия числового выражения, буквенного выражения, выражения с переменной, значение выражения как числового, так и буквенного (с переменной) [3, 71 и др.]. Понятие «равенство с переменной или «равенство, содержащее букву (переменную)», самостоятельно не выделяется, не отрабатывается, что говорит о формировании его на интуитивном уровне, ведущем к эмпирическому типу мышления (по Давыдову В.В. [31], [33] и др.). В частности, это явно следует из приведенного в учебнике решения задачи, описанной выше: «Так как весы находятся в равновесии, должно выполняться равенство …» [71, с. 82]. Аналогично изложение вопроса о понятии уравнения и его решении (равносильность уравнений, свойства равносильных уравнений) в систематическом курсе алгебры [3, 79 и других].

На основе выполненного анализа цитируемых выше источников можно утверждать о формировании эмпирического типа мышления учащихся при изучении теории уравнений в 5-х —7-х классах современной школы. Реализация деятельностного подхода к обучению ориентирует на развитие математического мышления учащихся теоретического типа [33]. Поэтому вопрос определения уравнения в школьном курсе математики и изучение теории решения уравнений с позиции деятельностного подхода к обучению пока остается открытым.

3.2. Теорема как вид суждения. Виды теорем

В мышлении понятия определенным способом связываются между собой. Видом связи понятий друг с другом является суждение. Как и понятие, суждение является одной из форм мышления. Суждение — это предложение, существенным признаком которого является наличие истинности или ложности в выражающем его предложении [75]. В логике суждение определяется как «форма мышления, представляющая собой сочетание понятий, из которых одно (субъект) определяется и раскрывается через другое (предикат)» [90, с. 777]. Суждение можно изобразить символически в виде формулы: S есть P (S не есть P), где S и P – переменные [113].

Каждая наука, по существу, представляет собой определенную систему суждений об объектах, являющихся предметом ее изучения. Каждое из суждений оформляется в виде некоторого предложения, выраженного в терминах и символах, присущих этой науке. Математика также представляет собой определенную систему суждений, выраженных в математических предложениях посредством математических или логических терминов или соответствующих им символов. Математические термины (или символы) обозначают логические операции, с помощью которых из одних математических предложений строятся другие суждения, вся совокупность которых и составляет математику как науку. Основными видами математических суждений являются теоремы и аксиомы (постулаты). Они и составляют *предмет* следующего вида *математической деятельности* — деятельности изучения утверждений. Перечислим категории, составляющие предмет этого вида математической деятельности, в том числе учащихся. И снова, как при анализе понятия, приходится уточнять представления о предмете деятельности. Иначе как деятельностный подход может быть реализован? С понятием «аксиома» просто — однозначность в понимании снимает все вопросы. Понятия «теорема», «структура теоремы», «доказательство», виды теорем требуют уточнения в целях данного исследования и не только.

Аксиома – предложение, принимаемое без доказательства (его истинность допускается). Определенное число аксиом образует систему отправных, исходных положений некоторой научной теории, лежащую в основе доказательства других положений (теорем) этой теории, в границах которой каждая из аксиом принимается без доказательства. Аксиомы и первичные (неопределяемые) понятия составляют основной фундамент математической теории. К системе аксиом, характеризующих некоторую научную теорию, предъявляются, как известно, требования независимости, непротиворечивости, полноты. *Постулат* – это предложение, где выражается какое-либо требование (условие), которому должно удовлетворять некоторое понятие или отношение между понятиями. Нередко постулаты являются частью определения некоторого понятия или системы понятий.

При изучении свойств различных математических объектов приходится делать те или иные заключения, то есть на основе понятий того или иного раздела математики строить предложения, истинность которых необходимо обосновать. Математическое предложение, истинность которого *устанавливается* посредством доказательства (рассуждения), называется *теоремой*. При этом о предложении «Если углы равны, то они вертикальные» говорят, что теорема неверна [11, 75 и др.]. Но в методико-математической литературе есть и другая точка зрения на понятие теоремы, в соответствии с которой приведенное выше предложение не является теоремой [113, 125 и др.]. Теорема — математическое утверждение, истинность которого установлена путем доказательства.[9] Большинство авторов школьных учебников придерживаются второй точки зрения на содержание понятия теоремы, хотя в формулировках, претендующих на определение, использованы глаголы «*устанавливается*», «*доказывается*» [79, с. 30; 101, с. 17 и др.]. Анализ литературы показал, что более целесообразно определение теоремы как утверждения, истинность которого *доказана* в данной теории.

Определимся с понятием «доказательство». В учебной литературе для семиклассников доказательство описывается как «строгое обоснование» [79, с.

[9] Математический энциклопедический словарь./Гл. ред. Ю.В. Прохоров; Ред. кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков и др. — М.: Сов. энциклопедия, 1988, с. 580.

30]; как рассуждение, в котором устанавливается «правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры» [101, с. 15]. Разъяснение сущности доказательства не проводится, лишь дан пример доказательства теоремы, т.е. налицо формирование эмпирического мышления, в то время как деятельностный подход в обучении ориентирован на развитие теоретического мышления [30]. В разъяснении учащимся сущности доказательства утверждения требуется раскрыть, что значит «строгое обоснование». Ясно, что не любое рассуждение является доказательством, даже с интуитивной, а не только с логической точки зрения.

Обращение к логике позволяет выделить действие, в результате которого из одного или нескольких суждений получается новое суждение, называемое *умозаключением*. Исходные суждения называют посылками, а новое – выводом или заключением. Если вывод делается из двух суждений, то умозаключение называют *силлогизмом*. Как известно, при доказательстве теорем в школьном курсе математики используется силлогизм, имеющий следующее строение: Все M суть P (большая посылка); S суть M (малая посылка). S суть P (вывод) [113].

Таким образом, для понимания доказательства у учащихся должно быть *сформировано понятие* об умозаключении. Для этого могут быть использованы задачи, точнее, решение задачи. Пример решения задачи, в котором представлены *умозаключения*, дано «строгое обоснование», приведен выше (см. с. 44). Формирование представления о решении задачи как последовательности умозаключений, позволяющей из условия (совокупности условий–суждений) вывести требуемое (суждение–заключение) на основе теоретических фактов, является пропедевтикой формирования понятия «доказательство теоремы». Достаточно сравнить решения указанной выше задачи (с. 44) с рассуждением – доказательством теоремы о медиане равнобедренного треугольника (см. с. 14), чтобы принять идею раннего формирования представления об умозаключении. Опыт изучения степени с натуральным показателем в пятом классе [124] убедительно показал состоятельность идеи формирования сущности доказательства в пропедевтическом курсе математики. Итак, *доказательство* есть рассуждение, являющееся последовательностью (цепочкой) умозаключений, выведением из условий заключения (требования) на основе фактов теории.

Библиографический список каждого учебного пособия по методике преподавания математики содержит статью выдающегося отечественного математика и педагога В.Г. Болтянского «Как устроена теорема» [11]. Но при этом описание видов теорем ограничивается рассмотрением предложений импликативной структуры, как простых (прямая, обратная к ней, противоположная и обратная противоположной), так и сложных (теоремы, выражающие необходимое и достаточное условие; теоремы, в условии или в заключении которых конъюнкция или дизъюнкция, и т.п.) [4, 6, 9 и др.]. Вопрос о классификации теорем в явном виде не ставится, хотя на основе материала указанной статьи В.Г. Болтянского это можно сделать. И такая попытка, на наш взгляд, предпринята при составлении словника по методике преподавания математики [132].

Рассмотрим примеры теорем. Первая — свойство углов при основании равнобедренного треугольника; вторая — теорема о существовании точки, равноудаленной от вершин треугольника (существование окружности, описанной около треугольника). Теоремы (3) — (6): свойство умножения степеней с натуральными показателями; теорема о длине окружности; тождество (формула) «квадрат суммы двух выражений», свойство арифметического квадратного корня.

$$(\forall \Delta ABC)\big((\Delta ABC - \textit{равнобедренный}; [AC] - \textit{основание}) \Rightarrow (\angle A = \angle C)\big); \quad (1)$$

$$(\forall \Delta ABC)(\exists M)(d(A,M) = d(B,M) = d(C,M)); \quad (2)$$

$$(\forall a)(\forall m, n \in \mathrm{N})(a^m \cdot a^n = a^{m+n}); \quad (3)$$

$$(\forall \omega(O;r))(\exists l, l \in \boldsymbol{R})(l = 2\pi r); \quad (4)$$

$$(\forall a,b)\big((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\big); \quad (5)$$

$$(\forall a)(\sqrt{a^2} = |a|). \quad (6)$$

Очевидно, что первая теорема представляет собой общеутвердительное суждение, имеющее *условную* форму словесного выражения. Структура этой теоремы в обобщенном виде $(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x))$, что означает: «Для всех *x*, если *x* присуще свойство *S*, то *x* присуще свойство *P*» [113, с. 68]. Теорему такой структуры называют *импликативной*. Структурные формулы других теорем: $(\forall x, y, z)(A(x, y, z))$— для теорем (3), (5), (6); $(\forall x)(\exists y)(A(x, y))$— для теорем вида (2), (4), где *A* – некоторый предикат. Например, теорема о существовании центра описанной окружности вокруг треугольника (2). Здесь *x* – треугольник, *y* – центр описанной окружности, предикат *A* – установление взаимосвязи треугольника с центром описанной вокруг него окружности. Утверждения (2) – (6) не содержат импликации, назовем их неимпликативными теоремами. Хотя структурная формула теорем (2) и (4) одна и та же, традиционно в математике выделяются теоремы существования и теоремы – формулы [132] . Представим классификацию теорем схемой (рис. 17). Неимпликативная теорема категорической формы может быть сформулирована в условной форме, стать импликативной.

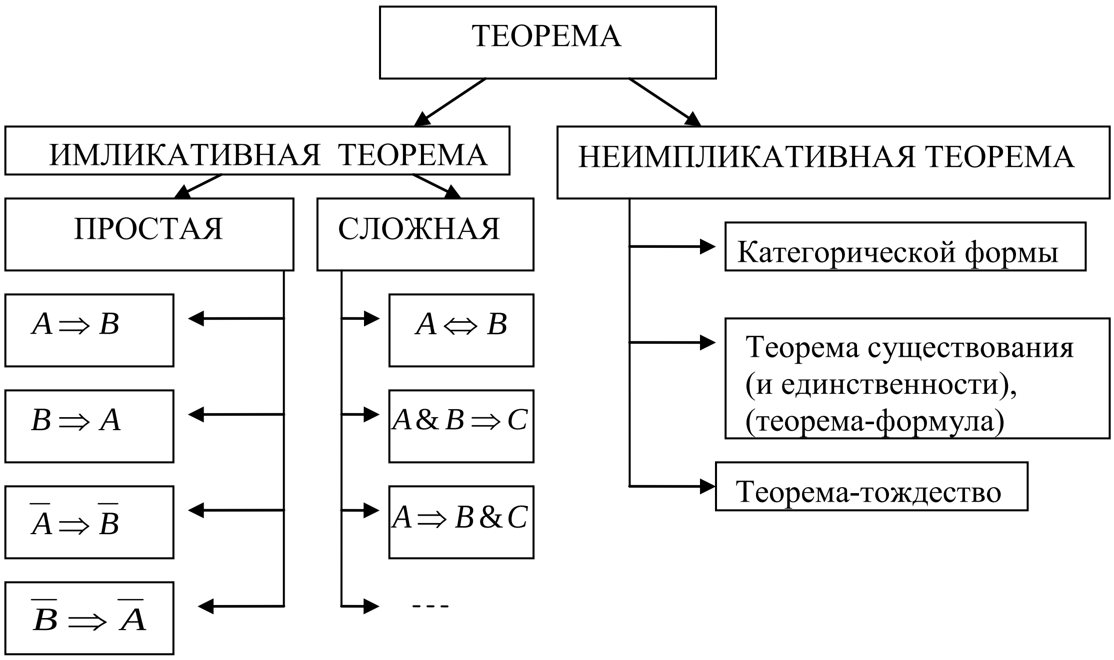


Рис. 17

Простую импликативную теорему $A \Rightarrow B$ (*) называют *прямой*, тогда суждение $B \Rightarrow A$ называют теоремой, обратной теореме (*) (или, короче, *обратной* теоремой). Заменив в теореме (*) условие и заключение их отрицаниями, получим суждение $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, которое называют *противоположным* теореме (*).

Теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ называют *обратной противоположной*. Тот факт, что теоремы $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ равносильны друг другу (если истинна одна, то истинна и другая), является основой одного из приемов косвенного метода доказательства — «метода от противного».

Если из *A* следует *B* ($A \Rightarrow B$), то *B* называют необходимым условием для *A*, то есть необходимое условие для *A* – это его следствие. Если из *A* следует *B*, то *A* называется достаточным условием для *B*. Достаточное условие не всегда является необходимым и наоборот. Примером является условие «два угла являются вертикальными» и «два угла равны». Однако встречаются условия, которые одновременно являются и достаточными, и необходимыми. В контексте видов теорем это означает одновременную истинность данного утверждения и обратного к нему. Например, $(\forall \Delta ABC)(d(A,B) = d(B,C)) \Leftrightarrow (\angle A = \angle C)$ [11, с. 44]. Важными частными случаями теорем являются: 1) *следствие* – теорема, легко доказываемая с помощью одной теоремы или определения; 2) *лемма* – теорема, представляющая интерес только как ступень к доказательству другой теоремы; 3) *необходимое и достаточное условие* – теорема, объединяющая в одной формулировке с использованием слов «необходимо и достаточно»[10] прямую и обратную теоремы; 4) *теорема существования* – теорема, в которой «отсутствуют условие и заключение» [Там же, с.49], но утверждается существование какого-либо объекта, обладающего определенными свойствами; 5) *теорема-тождество* и *теорема-формула* – теоремы, выраженные языком математических символов [132], например, свойства логарифмов.

1°. $(\forall a)\ (a > 0,\ a \neq 1)\ (\log_a 1 = 0)$.

2°. $(\forall a)\ (a > 0,\ a \neq 1)\ (\log_a a = 1)$.

3°. $(\forall a)\ (a > 0,\ a \neq 1)\ (\log_a a^r = r)$.

Свойства 1° – 3° — следствия определения логарифма, их истинность устанавливается по определению или свойству степени: $a^x = 1$; $a^x = a$; $a^x = a^r$.

4°. При любом положительном основании a ($a \neq 1$) логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел:

[10] Как известно, вместо словосочетания «необходимо и достаточно» могут быть использованы и другие: «если и только если», «тогда и только тогда» и т.п.

$(\forall a, b, c)$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$ $(\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$.

5°. При любом положительном основании a $(a \neq 1)$ логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:

$(\forall a, b, c)$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$ $\left(\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c\right)$.

6°. Если a, b – положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо тождество:

$(\forall a, b, r)$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)\left(\log_a b^r = r\log_a b\right)$.

Заметим, что свойства 5° и 6° — следствия свойства 4°.

Обобщением свойств 4°, 5°, 6° являются следующие формулы:

$\log_a x^{2n}$ = = $2\, n \log_a |\, x\,|$ (n – целое число).

$\log_a bc = \log_a |\, b\,| + \log_a |\, c\,|$. Аналогично: $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a |\, b\,| - \log_a |\, c\,|$.

Таким образом, принципы *предметности* деятельности и *единства* деятельности (внутренней и внешней) послужили основой проведенного анализа терминологии, связанной с понятием, его содержанием и объемом, и теоремой и ее видами.

Содержанием понятия является совокупность всех существенных признаков понятия. Определить понятие — значит выбрать его существенные свойства так, чтобы все вместе они были достаточны для отличия объектов изучаемого понятия от других. Определение понятия (математического объекта) — предложение (речевое или символическое), в котором перечислены существенные признаки, все вместе достаточные для отличия объектов изучаемого понятия от других. В определении должно раскрываться основное содержание понятия. В структуре определении понятия выделяют определяемое понятие, обозначенное новым термином, и определяющее понятие — достаточную совокупность существенных признаков.

На основе изучения теорем как предмета познавательной деятельности учащихся при обучении математике установлено, что теоремы курса алгебры седьмого класса — теоремы-тождества. Отсюда следует специфика формирования действий учащихся при изучении алгебраических теорем.

ГЛАВА 4. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Лучше всего обучает деятельность, если в процессе изучения ее выполняют.
Г. Фройденталь

4.1. Сущность деятельностного подхода в обучении математике

Исследование предмета математической деятельности и применение положения об единстве внешней (материальной) и внутренней (психической) деятельности позволило выявить *деятельностное содержание* в методике введения понятия, обучении доказательству теорем и решению задач, ориентированное на формирование у учащихся «знаний о знаниях» [127], «познавательного инструментария» [98, с. 90]. Деятельностный подход в обучении математике в средней школе можно успешно реализовать через формирование основных видов математической деятельности школьников на уроках. Для этого важно описание структуры каждого из них и, далее, процессов формирования этих видов деятельности у учащихся общеобразовательных учреждений, используя начатое в начальной школе развитие «общих учебных действий» [31, 128 и др.].

Основные виды математической деятельности учащихся отражены в методике обучения математике как познавательные процессы, подлежащие управлению со стороны учителя [24, 25, 40, 68, 75, 76 и др.]. Их выделение основано на содержании математического образования, представленного системой понятий и их признаков, оформленных в определениях (описаниях) и суждениях (аксиомах и теоремах), теоретические знания усваиваются в процессе решения разнообразных по значению и функциям задач. Поэтому в изучении математики в школе имеют место такие виды деятельности учащихся, как: введение понятия; изучение утверждений (обнаружение, формулировка аксиомы или теоремы, доказательство теорем); процесс решения задач.

Выделенные виды математической деятельности учащихся представляются традиционными. Однако это не так. Иначе зачем нужна была бы постановка современной задачи школы — формирование математической компетентности учащихся. Для решения новой актуальной задачи в дидактике обозначены современные подходы к обучению: личностно ориентированный, деятельностный и др. [43]. Деятельностный подход в обучении ориентирует учителя на раскрытие детям личностного смысла учения, на развитие адекватного отношения школьников к учению. Поэтому мотивация учащихся на уроке математики, целеполагание в начале урока и на отдельных его этапах, реализующих тот или иной вид деятельности, является главным показателем деятельностной технологии обучения.

Осуществление деятельностного подхода к *введению понятия* позволяет учащимся усваивать определение понятия не в его итоговой форме, основанной на запоминании формулировки, а получить в ситуации особо организованной аналитико-синтетической деятельности. Совокупность *действий*, составляющих деятельность «введение понятия», способствует раскрытию основного содержания, заключенного в понятии. Такой прием конкретно-индуктивного метода [40, 75, 100 и др.] введения математических понятий, как «прием отбора» [100, с. 15], или «конструктивный» [Там же, с. 16], выступает *операцией* действия *определения понятия* [68], позволяет ввести термин, обозначающий новый изучаемый объект. Операция формулировки определения в текстовой форме — итог активной самостоятельной работы каждого учащегося, результат действия определения понятия. Представление определения в символической записи — материализованная форма текстовой формулировки определения, обладающая ярко выраженной структурой, и потому наглядна. Словесная формулировка определения нового понятия для ученика представляет ни что иное, как перевод записанной *формулы–определения* с математического языка на естественный русский язык. Примеры определений понятий, приведенные выше (см. с. 41), хорошо иллюстрируют этот факт.

Благодаря наглядности математической записи определения понятия выполнение действий *выведение следствий определения* и *подведение под понятие* доступны каждому учащемуся, так как овладение символикой является одним из аспектов формирования процессуальной стороны предмета математической деятельности. Например, следствием определения логарифма числа (*логарифмом* числа b по основанию a называют *показатель степени,* в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b [2, с. 224]) является утверждение $b > 0, a > 0, a \neq 1$, вытекающее из определения и свойства знакопостоянства показательной функции. Символическая запись определения логарифма числа выглядит следующим образом: $\mathbf{log}_a b = \mathbf{x} \xleftrightarrow{def} \textit{показатель}\, \mathbf{x} : a^{\mathbf{x}} = b$. Заметим, что выделенное следствие определения некоторые авторы включают в формулировку определения: $\mathbf{log}_a b = \mathbf{x}, b > 0, a > 0, a \neq 1 \xleftrightarrow{def} \textit{показатель}\, \mathbf{x} : a^{\mathbf{x}} = b$ [82, с. 288]. Другим следствием определения логарифма числа является утверждение, известное как основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, получаемое заменой показателя x в равенстве $a^x = b$, входящем в определение, на $\log_a b$.

Реализация деятельности «введение понятия» включает в себя выявление учащимися видов объектов, объединяемых определением понятия. Осуществляется выделение видов изученного понятия *действием классификации* понятия, являющегося родовым в данной теории, или *обобщением* понятия — для понятия, являющегося видовым.

Деятельностный подход к изучению теоремы, решению задач, очевидно, заложен в современной методике изучения теорем, обучению решению задач [20, 75, 113 и др.]. Однако наблюдение опыта обучения математике в средней школе, результаты аттестации выпускников как девятых, так и одиннадцатых классов свидетельствуют о недостаточной деятельностной составляющей в их подготовке.

Обучение доказательству математических утверждений невозможно без получения учащимися знаний о видах математических предложений, об их логической структуре. Как известно, к математическим предложениям относятся определения понятий, аксиомы, теоремы. Уже при изучении первых теорем необходимо, чтобы школьники представляли себе структуру математического утверждения и структуру его доказательства. Проблема овладения современными школьниками математическими понятиями, их определениями, свойствами понятий на продуктивном уровне отражается в статистике результатов ЕГЭ, аттестационных экзаменов за основную школу. Итоговая аттестация выпускников девятых классов по алгебре за 2008 год показывает, что на "5" с заданиями справились лишь 7,7% всех учащихся; на "4" – 19,9%; на "3" – 43,2%; на "2" – 29,2%. Т.е. почти треть выпускников девятилетней школы не усвоили базовый курс даже на оценку "3". Аналогичная ситуация и в 11 классах. За 2008 год пятерки получили лишь 9% всех выпускников, в то время как 23,5% имеют неудовлетворительную оценку.

Таким образом, опыт современного образования, качество обучения математике *всех выпускников* ориентирует на дальнейшие исследования в области методики преподавания предмета, усиления путей адаптации психолого-педагогических исследований в сфере обучения математике школьников.

4.2. Деятельность по введению математических понятий

Нельзя внести точность в рассуждения, если
она сначала не введена в определения.
Д. Гершель

Понятия являются главными составляющими любой науки, каждого учебного предмета. В нашем исследовании, исходящем из признания приоритета предмета познавательной деятельности в процессе обучения математике (с. 30), обеих его сторон (логико-операционной и содержательной), математическим понятиям отводится особое внимание.

Обеспечение полноценного усвоения математических понятий — программное требование и одна из главных задач учителя. Обращение к школьной практике показывает, что «… эта задача решается не так успешно, как того требуют цели общеобразовательной школы» [128, с. 187]. Об этом свидетельствуют и результаты обучения (см. выше), а также многочисленные исследования, в частности Н.Ф. Талызиной. Главным недостатком школьного усвоения понятий издавна считается формализм, суть которого состоит в том, что учащиеся, правильно воспроизводя определения понятий, не умеют пользоваться ими в процессе решения задач и доказательстве утверждений. Если считать формулирование учеником определения понятия осознанием его содержания, то неумение пользоваться им при ориентировке в предметной действительности называется не иначе как формализмом в знаниях.

До настоящего времени сохраняется главная причина этого явления. Мы разделяем мнение Н.Ф. Талызиной, что формализм в усвоении школьниками понятий (в том числе и математических) сохраняется ввиду отсутствия в обучении (в учебниках) ознакомления учащегося с логической структурой определения. Заучив огромное количество различных конкретных определений, ученик не может восстановить при необходимости забытое, «так как не знает структуры определений, не владеет правилами их построения» [128, с. 73].

Еще раз наглядно продемонстрируем роль понятий и их определений в доказательстве утверждения на примере одной из первых теорем геометрии: при изучении свойства вертикальных углов. Сначала представим определения развернутого угла и вертикальных углов, используемые в доказательстве. В текстовой формулировке выделены определяемое понятие, родовое понятие и видовые отличия. Приведена символическая запись этих определений.

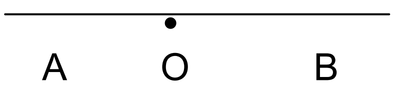


Рис. 18

Развернутым углом называют *угол*, у которого *стороны* являются *дополнительными полупрямыми* (*лучами*).

Развернутый угол $\xleftrightarrow{def}$ $\angle AOB$: $[OA)$ и $[OB)$ – дополнительные полупрямые (лучи).

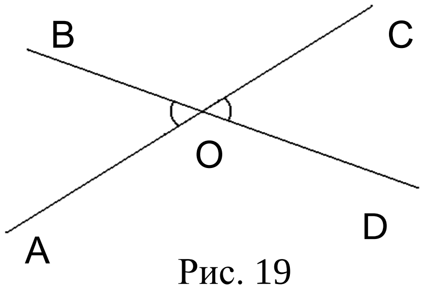


Рис. 19

Вертикальными углами называют *два угла*, у которых *стороны одного* являются *дополнительными лучами к сторонам другого.*

Вертикальные углы $\xleftrightarrow{def}$ $\underbrace{\angle AOB \text{ и } \angle COD}_{\text{два угла}}$:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ [OA) \text{ и } [OC)\\ \bullet\ [OB) \text{ и } [OD)\end{array}\right\} \text{ – дополнительные лучи.}$$

Теорема о вертикальных углах имеет импликативную структуру:

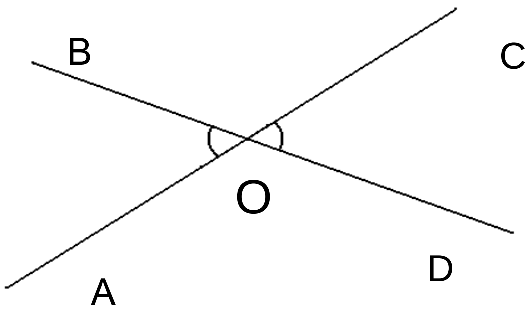


Рис. 20

Дано: $\angle AOB$ и $\angle COD$ — вертикальные углы.

Доказать: $\angle AOB = \angle COD$.

Доказательство представим дедуктивным рассуждением, иллюстрирующим применение определений понятий. Сравнение приведенного доказательства с изложением этой теоремы в любом учебнике показывает, что определения понятий использованы не только на уровне термина, представления (образа), но с воспроизведением и полным выделением определяющих признаков. Это значит, что овладение понятием продолжается в ходе изучения его свойств, причем используется символическая запись определяющих признаков понятия.

Доказательство

Таблица 3

Малая посылка	Большая посылка	Утверждение
$\angle AOB$ и $\angle COD$ — вертикальные	Определение вертикальных углов	$[OA)$ и $[OC)$, $[OB)$ и $[OD)$ – дополнительные полупрямые
$[OA)$ и $[OC)$, $[OB)$ и $[OD)$ – дополнительные полупрямые	Определение развернутого угла	$\angle AOC$, $\angle BOD$ – развернутые
$\angle AOC$ – развернутый, $\angle BOD$ – развернутый.	Свойство измерения развернутого угла	$\angle AOC = 180^\circ$, $\angle BOD = 180^\circ$
$\angle AOC = 180^\circ$, $[OB)$ – луч, проходящий между сторонами $\angle AOC$	Аксиома измерения угла	$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$
$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, $\angle AOC = 180^\circ$	Подстановка и преобразование числового равенства	$\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC$
$\angle BOD = 180^\circ$, $[OC)$ – луч, проходящий между сторонами $\angle BOD$	Аксиома измерения угла	$\angle COD = 180^\circ - \angle BOC$
$\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC$, $\angle COD = 180^\circ - \angle BOC$	Свойство числовых равенств (транзитивность)	$\angle AOB = \angle COD$

Применение определения понятия в доказательстве, представленном дедуктивным рассуждением (табл. 3), актуализирует действие подведение под понятие, требует использования определения в новой ситуации. Многократное применение определения в развернутой форме, бесспорно, способствует сознательному, а не формальному его усвоению.

Деятельностный подход к обучению при формировании понятий означает, что «понятие не может быть передано учащимся в готовом виде, они должны получить его сами, взаимодействуя с относящимися к нему предметами. … Определение задает как бы точку зрения — ориентировочную основу — для оценки предметов, с которыми взаимодействует обучаемый. … Такая реальная работа по оценке различных предметов постепенно создает в голове ученика адекватное понятие как обобщенный и абстрактный образ предметов данного класса» [128, с.194]. И, как точно отмечает далее Н.Ф. Талызина, получение определения понятия — это лишь первый шаг на пути усвоения понятия. Следующий шаг — включение определения понятия в действия учащихся с соответствующими объектами (выведение следствий определения, подведение под понятие, классификация понятия), которые они выполняют и с помощью которых в сознании учащихся создается понятие об этих объектах. Таким образом, овладение понятием предполагает:

- усвоение определения понятия, которое является результатом действия определения (описания) понятия;
- распознавание объектов, входящих в объем изученного понятия;
- изучение существенных признаков понятия, не входящих в определение (выведение следствий из определения и изучение других свойств, представленных в теоремах);
- выделение частных видов понятия или его обобщение; применение содержания понятия в решении задач и дальнейшем изучении предмета.

Опишем структуру и содержание деятельности учащихся, систематическое и планомерное осуществление которой способствует формированию учебных действий, воспитанию познавательных привычек при изучении нового понятия.

4.2.1. Структура деятельности «введение понятия»

Должен быть почитаем, как бог, тот,
кто хорошо может определять и делить.
Платон

Процесс ознакомления с новыми объектами, объединенными понятием, в нашем исследовании назван деятельностью «введение понятия» [12, 13, 15 и др.]. Это один из основных видов деятельности учащихся на уроке, имеющем дело с научными понятиями. Поскольку процесс введения понятия рассматривается нами как деятельность, то его структура должна быть адекватна структуре понятия «деятельность». Покажем, как структура категории «деятельность», приведенная выше (см. рис. 5, с. 22), конкретизируется в *деятельности введения понятия* (ДВП).

Источником возникновения ДВП является потребность во введении в изучение нового для учащихся математического объекта. Иллюстрацию необходимости изучения нового объекта, выделение его из ранее известных, введение понятия, его обозначающего, обеспечивает проблемная ситуация. Для мотивации изучения понятия и обозначения арифметического квадратного корня может быть задание на решение следующих квадратных уравнений:

$x^2 = 4$ (1) Ответ: $\{-2; 2\}$.

$x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (2) Ответ: $\{-0{,}5; 0{,}5\}$.

$x^2 + 9 = 0$ (3) Ответ: Ø.

$x^2 = 7$ (4) Ответ: $\{?; ?\}$.

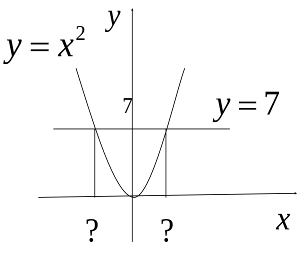


Рис. 21

Графическое решение последнего уравнения (рис. 21) показывает, что его корни существуют, как и в уравнениях (1), (2). Более того, они противоположны. Но назвать эти числа, записать их учащиеся не могут, т.к. соответствующих знаний у них пока еще нет. Возникает осознание потребности в новых знаниях, в расширении понятия числа, во введении обозначения $\sqrt{7}$. Аналогично может быть построено изучение понятия степени с натуральным показателем, логарифма числа (см. с. 19), а также многих других понятий школьного курса математики.

Понимание необходимости изучения нового объекта сопровождается постановкой общей цели — ввести в изучение дисциплины новое понятие. Ознакомление с понятием сопровождается введением термина и символа, принятого в науке для краткой записи; изучением определения нового понятия; формированием умения распознавать объекты, входящие в объем нового понятия, и применять определение понятия в дальнейшем обучении. Термин или символ, как правило, позволяют показать историю возникновения и развития понятия. Появляется возможность рассказать учащимся об ученых, впервые использующих данное понятие; о научных дискуссиях по тому или иному вопросу; о нравственных качествах людей, посвятивших свою жизнь математическим исследованиям. Для одной категории учащихся исторические экскурсы усиливают мотивацию их познавательной деятельности, для других школьников не менее значимо убедиться в существовании нового математического объекта. Например, в случае с понятием арифметического квадратного корня из семи полезно доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен семи.

Если мотивация учащихся состоялась, то начинается деятельность по введению нового понятия. В нашем примере изучения понятия арифметического квадратного корня рассмотрение объектов определенного рода (например квадратных уравнений: $x^2=5$; $x^2=7$; $x^2=8$; $x^2=11$) показывает существование чисел, являющихся квадратами других (рис. 21). Однако назвать точное значение x можно было только в случае, если число, стоящее в правой части уравнения, представимо в виде точного квадрата. В других случаях задача оставалась без ответа. У учащихся возникает потребность к изучению понятия арифметического квадратного корня из любого неотрицательного числа, и они готовы поставить (принять) цели, которые задают действия ДВП:

- определение понятия;
- выведение следствий из определения;

- подведение под понятие;
- классификация (или обобщение) понятия.

Эта структура деятельности «введение понятия» обусловлена сущностью ее предмета — понятия как категории логики (см. выше п. 3.1, с. 47). Основные положения реализации деятельностного подхода при введении понятия раскрыты и аргументированы выше (см. с. 70-71). Поэтому на основе вышеизложенного продолжим описание осуществления ДВП на примере введения понятия арифметического квадратного корня. Уравнения (1) – (4), решение которых были использованы для мотивации учащихся (см. с. 76), могут быть использованы в качестве упражнений для введения определения понятия конструктивным приемом (рис. 21). При решении уравнения $x^2 = 7$ достаточно найти его корень x, тогда второй корень будет противоположным ему числом (рис. 22).

Сосредоточив внимание учащихся на объекте x, учитель вводит *термин* и *обозначение* для нового понятия: x – ***арифметический***[11] ***квадратный корень из*** **7**; $x = \sqrt{7}$. Усвоение термина и обозначения реализуется на следующих примерах (1 –5):

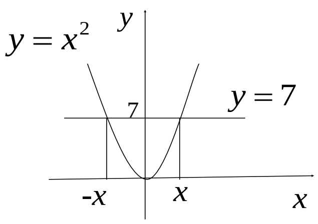


Рис. 22

1. $x^2 = 4$, $\sqrt{4} = 2$. Ответ: $\{-2; 2\}$.
2. $x^2 - \dfrac{1}{4} = 0$, $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$. Ответ: $\{-0{,}5; 0{,}5\}$.
3. $x^2 = 49$, $\sqrt{49} = 7$. Ответ: $\{-7; 7\}$.
4. $x^2 = 5$; Ответ: $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ и т.п.
5. $x^2 = a$; $x = ?$ Ответ: $\{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.

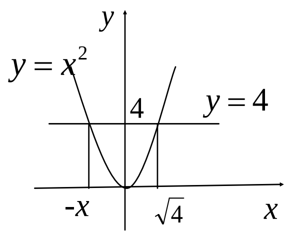


Рис. 23

[11] В учебной литературе имеются два подхода к определению понятия: **арифметическим квадратным корнем их числа *a*** называется неотрицательное число, квадрат которого равен a [4, с. 66]; **квадратным корнем из неотрицательного числа *a*** называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен данному числу a [80, с. 88].

После усвоения термина и обозначения перед учащимися ставится цель (или они сами ставят ее): *сформулировать* определение понятия «арифметический квадратный корень из числа *a*». После текстовой формулировки определения учащимися и при уточнении ее (по необходимости) учителем следует запись на математическом языке, сопоставление двух форм записи определения, в котором происходит усвоение формулировки определения:

Определение. $\sqrt{a}=b \xleftrightarrow{def}$ *число* b: 1) $b\geq 0$; 2) $b^2=a$.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Действие определения понятия выполнено. Формулировка определения является началом его усвоения, которое продолжается осуществлением действия *подведения под понятие*. Подведение под понятие реализуется решением задач с дидактической функцией [83] — заданий на формирование видовых отличий определения понятия. Примеров таких задач, как правило, достаточно в учебниках. Например, на подведение под понятие арифметического квадратного корня, т.е. на усвоение видовых отличий: 1) $b\geq 0$, 2) $b^2=a$, в учебнике 14 заданий [4]. Приведем некоторые из них.

1. Докажите, что число 5 является (–5 не является) арифметическим квадратным корнем из 25 [4, с. 66].

2. Докажите, что $\sqrt{121}=11$ и т.п., еще три упражнения.

3. Вычислите: $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{\frac{121}{64}}$ (всего десять упражнений).

4. Найдите значение переменной, при котором $\sqrt{x}=4$ ($\sqrt{x+5x}=7$ и т.п.).

Число таких задач по каждой теме в учебниках различно. Так, в учебнике геометрии А.В. Погорелова они практически отсутствуют, что обязывает учителя дополнять локальную систему задач.

Усвоение понятия арифметического квадратного корня из числа *a* продолжается изучением определения. Использование наглядной формулировки (символической записи определения) помогает учащимся выявить другие существенные свойства понятия, отличные от определяющих: ($\sqrt{a} = b \xleftrightarrow{def}$ *число* b: 1) $b \ge 0$; 2) $b^2 = a$) $\Rightarrow a \ge 0$. Ответ на вопрос: «Какие выводы из определения можно сделать о значениях числа *а*?» будет первым *следствием определения понятия*[12]. Второе следствие учащиеся получают заменой b во втором определяющем свойстве на $\sqrt{a}$.

Следствие 1. $a \ge 0$.

Следствие 2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \ge 0$.

Эти первые «открытия» теории арифметического квадратного корня учащиеся могут сделать самостоятельно, более того, они смогут дать обоснование истинности утверждений. Традиционный подход «дать учащимся всю теорию полностью в готовом виде, в том числе и эти свойства», утрачивает значение. Таким образом, выполняя действие «выведение следствий из определения», учащиеся узнают существенные свойства понятия, не вошедшие в определение, то есть продолжается усвоение *содержания понятия*. Каждое из следствий очень важно в дальнейшем изучении темы. Однако в действующих школьных учебниках [4] изучение свойства, например, $(\sqrt{a})^2 = a$ явно не учитывает закономерностей процесса познания, реализации деятельностного подхода. В первую очередь это задачи на представление любого положительного числа в виде квадрата: $7 = \left(\sqrt{7}\right)^2$ и т.п. Этот факт позволяет расширить круг задач линии тождественных преобразований выражений до изучения свойств арифметического квадратного корня. Содержанием дидактического материала учебника не обеспечено усвоение следствий определения: отсутствуют задания на нахождение значения выражений и упрощение выражений типа:

Задание 1. Вычислить: $\left(\sqrt{7}+1\right)^2$; $\sqrt{8+2\cdot\sqrt{7}} - \sqrt{7}$.

Задание 2. Сократить дробь: $\dfrac{7-a^2}{\sqrt{7}+a}$ и т.п.

[12] Речь идет об определении понятия арифметического квадратного корня в первой трактовке [4]. Во втором случае [80] эти свойства понятия входят в определение: $\sqrt{a}, a \ge 0 \xleftrightarrow{def}$ 1) $\sqrt{a} \ge 0$; 2) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Следствия определения, пополняющие содержание понятия новым фактом, а также понятие подкоренного выражения должны быть усвоены при изучении понятия арифметического квадратного корня, как того требуют дидактические принципы. Если на усвоение первого следствия определения арифметического квадратного корня из числа a ($a \geq 0$) в учебниках предусмотрено задание («имеет ли смысл выражение $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{-0{,}64}$» [4, с. 68]), то изучение второго следствия: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, а значит, и овладение понятием $\sqrt{a}$ не обеспечено системой упражнений [4] и др.

Отметим, что следствия определений понятий в курсе алгебры представлены в учебниках практически для каждого понятия, хотя так не именуются. Например, $a^{\log_a b} = b$ при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ — основное логарифмическое тождество является следствием определения логарифма (см. с. 41). Иначе обстоит дело с изучением следствий определений понятий в курсе геометрии. Так, следствием определения параллелограмма является свойство углов, прилежащих к одной его стороне, часто используемое при решении задач. Следствие определения трапеции — аналогичное свойство углов, прилежащих к ее боковой стороне. Следствием определения вписанного в окружность угла является утверждение о соответствии вписанному углу дуги окружности, на которую он опирается. Как было замечено выше, существенные свойства понятия — следствия определения, входят в содержание изучаемого понятия, могут быть «открыты» учащимися самостоятельно (под руководством учителя). Поэтому выполнение действия «выведение следствий определения» в структуре ДВП позволяет ученику: понять, как строится теория; получать *опыт* формулировки умозаключений, установления новых фактов в естественных, а не искусственно созданных условиях; развивать самостоятельность мышления, инициативу в познавательной деятельности; иметь эмоциональную поддержку в ходе обучения на разных этапах урока. Все эти факторы способствуют становлению ценностно-смысловой сферы личности, развитию мотивации учения.

В действующих школьных учебниках алгебры принят индуктивный подход к изложению теории. Поэтому чаще всего, осуществляя ДВП, выполняется действие обобщения понятия, раскрывающее перспективы изучения предмета. Так, при изучении арифметического квадратного корня осуществляется обобщение понятия: $\sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, ..., \sqrt[n]{a}$. Отметив, что в обозначении арифметического квадратного корня показатель корня — число 2 — не пишется, можно поставить на обсуждение вопросы: можно ли говорить о других видах арифметических корней, какие задачи приводят к этим понятиям? Ответы на эти вопросы иллюстрируют учащимся перспективу изучения предмета, суть развития математической теории.

Наконец, отметим, что классификация (или обобщение) понятия как действие, направленное на овладение понятием, в контексте с введением понятия в методике преподавания математики часто не выделяется [20, 40, 67, 68, 75, 76, 113, 126].

4.2.2. Структура действий деятельности «введение понятия»

Введение нового понятия как деятельность состоится в результате выполнения четырех действий, каждое из которых соответствует *частной цели*, определенной мотивом ДВП:

1) выделить свойства изучаемого понятия, с помощью которых объекты, входящие в объем нового понятия, будут отличаться от других математических объектов;

2) научиться распознавать, принадлежит ли предъявленный объект объему введенного понятия (действие «подведение под понятие»);

3) соотнести введенное понятие (его видовые отличия) с ранее изученными фактами (вывести следствия из определения);

4) включить изученное определение в систему имеющихся знаний: выявить частные виды нового понятия или установить, видом какого понятия является вновь изученное понятие (действие «классификация» или «обобщение понятия»).

Первая цель задает *действие определения понятия*. Его структуру составляют операции:

- выделение родового понятия и видовых отличий (реализуемое приемом отбора или конструктивным приемом [100, с. 15–16]);
- введение термина и обозначения (если оно предусмотрено);
- формулировка определения в текстовой форме;
- формулировка определения в знаковой форме (символическая запись определения).

Положение о формировании познавательного инструментария учащихся [98] (см. с. 33) требует, чтобы для осуществления действия определения понятия ученик *знал* его смысл[13] и операциональный состав. При этом мы придерживаемся сформулированных выше описаний сущности категорий «содержание понятия», «определение понятия», логической операции «определение понятия», «определяемое понятие», «определяющее понятие» (см. с. 53).

Сформированность познавательного инструментария учащихся означает, что при самостоятельном изучении определения понятия ученик должен вычленять в тексте:

- определяемое понятие (термин), его обозначение;
- определяющее понятие (родовое понятие и видовые отличия, представленные различными логическими конструкциями[14]);
- символическую запись определения.

В случае отсутствия символической записи определения понятия ученик должен уметь выполнить ее. Для формирования осознанного изучения школьниками определения нового для них понятия, для *воспитания познавательной привычки* учащихся работать подобным образом следует в классе во фронтальной работе четко[15] организовывать ДВП, осуществляя рефлексию действия определения понятия.

---

[13] Школьниками достаточно успешно усваивается, что «определением называют предложение, в котором разъясняется смысл новых слов» [38, ч.1, с.165].
[14] Структура определяющего понятия может быть конъюнктивной, дизъюнктивной или импликативной.
[15] Организационная четкость — одно из требований к уроку математики [75, с. 308].

Итак, знание сущности действия *определение понятия* раскрывает учащимся логическую структуру определения, ориентирует на выделение определяющих свойств понятия (основного содержания понятия). Это дает возможность учащимся самостоятельно формулировать определение понятия в текстовой и знаковой форме, способствует осознанию места изучаемого понятия в системе других понятий, позволяет качественно применять его при доказательстве теорем и решении задач.

Вторая частная цель ДВП задает действие (прием логического мышления) *подведение объекта под понятие*. Действие, посредством которого обосновывается, что некоторый объект или отношение принадлежит соответственно множеству объектов или отношений, составляющих объем данного понятия, называется подведением под понятие [68] и является одним из основных действий деятельности введения понятия. Овладение этим действием относится к одной из ключевых компетенций школьника [142] и является составляющей математической компетентности. Это общее действие (общий вид деятельности, как отмечает Н.Ф. Талызина) формируется у учащихся начальной школы [128]. Его структуру составляют операции:

- выделение понятия, под который следует подвести данный объект, его определяющих признаков;
- выделение понятия, которому принадлежит объект, актуализация его определяющих признаков;
- сравнение совокупности определяющих признаков понятия, которому принадлежит объект (множество A), и совокупности определяющих признаков понятия, под которое подводится объект (множество B);
- установление отношения включения между множествами A и B: $A \subseteq B$;
- вывод о принадлежности объекта объему данного понятия.

Очевидно, что первые две из выделенных операций действия «подведение объекта под понятие» основаны *на овладении* действием «определение понятия», являются применением определения в новой ситуации. Это составляет проявление элементарного акта самостоятельности учащегося в деятельности.

Свертывание мыслительных операций в действия, а действий — в деятельность у каждого ребенка происходит по-своему, сообразно его психическим особенностям [55].

Приведем интерпретацию действия «подведение под понятие» на примере степени с натуральным показателем. Выполнение действия предполагает осуществление умения выбрать из различных примеров те, которые являются степенью числа. Например, для подведения под понятие выражения $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot6$ необходимо выполнить следующие операции:

1) вспомнить (мысленно представить) определение степени с натуральным показателем[16], выделить его определяющие признаки:

- «произведение *n* множителей»,
- «каждый из которых равен *a*»;

2) назвать понятие, к которому относится данный объект (выражение): произведение *n* множителей;

3) установить, имеет ли место включение множества определяющих признаков понятия степени с натуральным показателем во множество признаков, характеризующих данный объект;

4) на основе установленного факта $\overline{(A \subseteq B)}$ сделать вывод о том, что данное произведение не является степенью числа.

В процессе решения задач и доказательствах теорем почти всегда приходится устанавливать, что данные объекты или отношения принадлежат объемам соответствующих понятий, т.е. выполнять действие «подведение под понятие» (см., например, шестой силлогизм доказательства свойства медианы, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, с. 14).

Третья частная цель ДВП (соотнести вновь введенное понятие, его видовые отличия с ранее изученными фактами) задает действие *выведение следствий из определения понятия*. Как показано выше, это действие служит «откры-

[16] Определение степени с натуральным показателем: a^n, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1 \xleftrightarrow{def}$ 1) $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$. 2) $a^1 = a$ (см. с.41).

тию» существенных свойств понятия, не включенных в формулировку определения. Его структуру составляют операции:

- выделение каждого видового отличия в определении понятия (его определяющих признаков);
- сделать вывод из факта, зафиксированного данным видовым отличием, включая его в систему имеющихся знаний или выполняя соотнесение с определяемым понятием.

Так, выделение видового отличия арифметического квадратного корня: $b^2 = a$ (см. с. 79), применение свойств неотрицательности квадрата числа и отношения равенства позволяют сделать вывод, во-первых, о неотрицательности значений подкоренного выражения a. Во-вторых, соотнесение с определяемым понятием: $\sqrt{a} = b$, замена b на $\sqrt{a}$, дает важное тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Включение определения изученного понятия в совокупность известных фактов служит основой для появления нового знания. Например, следствием определения параллелограмма является свойство суммы углов, прилежащих к данной стороне параллелограмма (их сумма равна 180°). Для получения этого факта достаточно применить свойство внутренних односторонних углов, образованных прямыми, содержащими параллельные стороны, и секущей — прямой, проходящей через смежную сторону. Следствием определения уравнения с одной переменной (неизвестной) (см. с. 59) являются понятия корня (решения) уравнения, области определения уравнения (области допустимых значений).

Наконец, действие *классификации понятия*, способствующее расширению математического кругозора учащихся, формированию представления об объеме понятия, осуществляется следующими операциями:

- выбор основания классификации (признака, по которому выполняется деление множества объектов);
- выполнение деления множества на подмножества (классы);
- исследование возможности дальнейшего деления полученных классов.

Это действие выполнятся как сразу после введения определения понятия, так и в ходе систематизации знаний о понятии. Например, с понятием «выражение» учащиеся знакомятся в начальной школе. Уже в пятом классе ученики могут приводить примеры следующих выражений:

$x + 5$; $5 + 8$; $x + y = y + x$; $5 \cdot 10 = 10 \cdot 5$; $\frac{1}{2}$; $x > 3$.

Опыт показывает, что, выбрав в качестве основания классификации признак «наличие переменной (буквы) в выражении», учащиеся приходят к одной из известных классификаций этого понятия [67] (конечно, в терминах, соответствующих уровню их знаний):

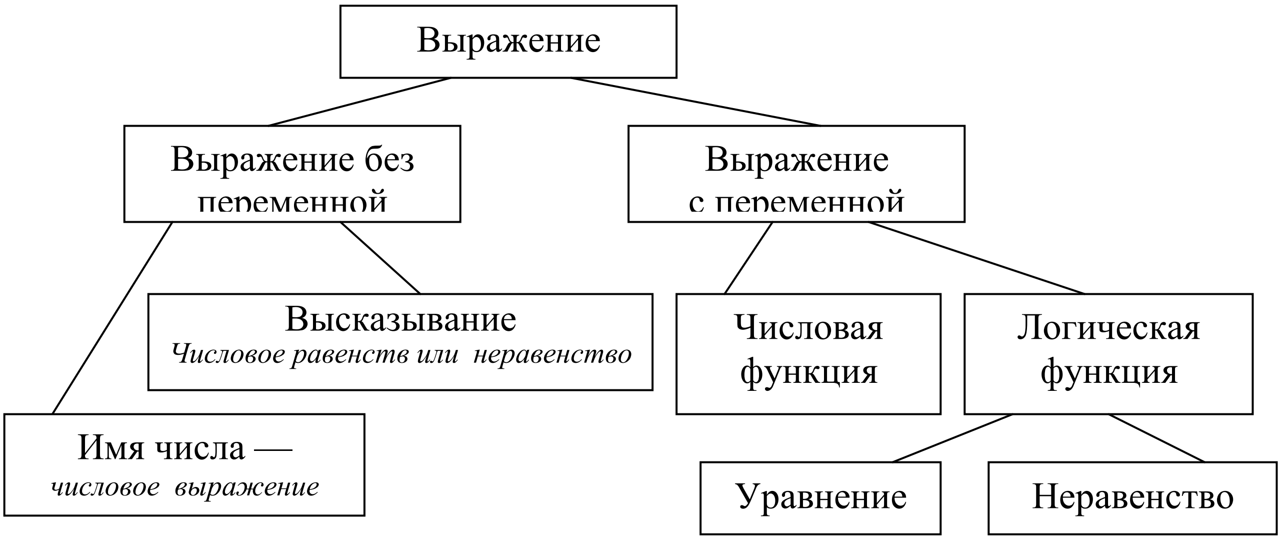


Рис. 24

Такие классификационные схемы, иллюстрируя многообразие видов данного понятия, показывают учащимся перспективу изучения предмета, с одной стороны, а с другой — обращение к ним способствует формированию системы знаний, представлений о родовых и видовых понятиях.

Действие «классификация понятия» можно формировать у учащихся посредством заданий на установление общего признака объектов и заданий на деление множества объектов на подмножества, выделением основания классификации. Такие задания уже появляются в учебной литературе [130, 152], они характерны для учебников системы развивающего обучения Л.В. Занкова, используются в учебниках математики Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон [37, 38] и др.

4.3. Деятельность по изучению утверждений

Нужно всеми средствами обучать искусству доказывать, не забывая при этом и об искусстве догадываться.

Д. Пойа

4.3.1. Структура деятельности «изучение утверждений»

Деятельность по изучению понятия на уроке математики переходит в изучение его свойств, представленных чаще всего в виде теоремы. Деятельность по изучению утверждений (ДИУ) и процесс решения задачи имеют много общего по структуре, поскольку представляют собой различные способы применения знаний о понятиях и их свойствах. Можно сказать, эти виды деятельности порождаются первой — деятельностью введения новых понятий.

Выделение видов деятельности необходимо для их изучения и осуществления деятельностного подхода в математике. В учебном процессе одна деятельность сменяется другой или входит в другую. Так, при изучении арифметического квадратного корня из числа a действия, составляющие деятельность по изучению понятия, сменяются действиями следующего вида деятельности.

Деятельность по изучению утверждений (теорем) осуществляется следующими действиями:

- обнаружение свойства, его формулировка (выдвижение гипотезы);
- изучение структуры математического предложения;
- поиск плана доказательства;
- доказательство утверждения;
- изучение результатов деятельности: выведение следствий теоремы, ее обобщение, различные способы доказательств.

Последнее действие представляет собой конкретизацию общих учебных действий контроля и оценки [33, с. 15] для особого предмета деятельности — теоремы и ее доказательства.

Как показывает опыт, дети очень любят «открывать» новые знания, устанавливать закономерности. Использование деятельностного подхода в обучении именно на этом и основывается. Для понятия арифметического квадратного корня ситуация, приводящая к открытию свойства, легко создается заданиями на вычисление значений выражений, например, следующих: $\sqrt{36 \cdot 49}$ и $\sqrt{36} \cdot \sqrt{49}$; $\sqrt{64 \cdot 25}$ и $\sqrt{64} \cdot \sqrt{25}$; $\sqrt{625 \cdot 144}$ и $\sqrt{625} \cdot \sqrt{144}$. Наблюдение и сравнение результатов вычислений приводят учащихся к обобщению, на основе которого выдвигается гипотеза — словесная формулировка утверждения.

Формулировкой гипотезы (теоремы) завершается первое действие *деятельности по изучению утверждений*. За ним следует действие, направленное на изучение структуры теоремы. Суть этого действия заключается в преобразовании словесной формулировки: запись на математическом языке, выделение (если возможно) условия и заключения теоремы, уточнение значения параметров. В рассматриваемом примере изучения свойства арифметического квадратного корня в восьмом классе [4] его полная запись может быть следующей: $(\forall a \geq 0, b \geq 0)(\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b})$. Структура этого свойства имеет вид $\forall(a,b)(P(a,b)$, по которому определяется вид теоремы: «теорема–тождество» [11, с. 49]. С появлением символической записи свойства можно считать действие по изучению теоремы реализованным, и далее «включается» следующее действие — поиск плана доказательства. Целенаправленный поиск доказательства утверждения — эвристическая, внутренняя деятельность ученика, внешнее проявление которой наблюдается умением ставить нужные вопросы и отвечать на них. Это общие вопросы, в методике преподавания математики они известны как составляющие рассуждения методом восходящего анализа [75].

Итак, нужно доказать истинность равенства: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$.

– Что *достаточно,* чтобы утверждать истинность этого равенства? Ответ на вопрос будет сформулирован, благодаря выполнению действия «подведение под понятие» арифметического квадратного корня.

– Достаточно показать, что выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ является арифметическим квадратным корнем из выражения $a \cdot b$, т.е. достаточно обосновать:

1) существование выражения $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и его неотрицательность ($\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$);

2) $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$.

Составленный план доказательства показывает, что цель, породившая действие, достигнута, ход доказательства найден, и учащиеся переходят к выполнению следующего действия — осуществления доказательства.

Таблица 4

Условие	Обоснование	Заключение
1. $\sqrt{a \cdot b}; \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$ $a \geq 0, b \geq 0$	Следствие определения арифметического квадратного корня	$\sqrt{a \cdot b}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ существуют
2. $\sqrt{a}, \sqrt{b}$	Определение арифметического квадратного корня	$\sqrt{a} \geq 0, \sqrt{b} \geq 0$
3. $\sqrt{a} \geq 0, \sqrt{b} \geq 0$	Правило умножения неотрицательных чисел	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$
4. $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$	Степень произведения	$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$
5.$(\sqrt{a})^2$, $(a \geq 0)$, $(\sqrt{b})^2$, $(b \geq 0)$	Следствие определения арифметического квадратного корня	$(\sqrt{a})^2 = a$; $(\sqrt{b})^2 = b$
6. $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 =$ $=(\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$; $(\sqrt{a})^2 = a$; $(\sqrt{b})^2 = b$	Подстановка значений выражений	$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$
7. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$, $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$	Определение арифметического квадратного корня	$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

В таблице 4 представлено полное, подробное рассуждение (цепочка силлогизмов), являющееся доказательством этого свойства. Ученик должен понимать суть приведенного доказательства, осознавать каждый этап этого рассуждения. Во внешних действиях этот процесс проявляется в «свернутом» виде. Еще более свернуто доказательство теоремы, представленное в учебнике [4, 80]. К моменту изучения свойств арифметического квадратного корня учащиеся должны уже *овладеть* деятельностью по доказательству теоремы. Формирование ее, убеждение в необходимости доказательств и обучение действиям, составляющим этот вид математической деятельности учащихся, в настоящее время приходится на 5-6 классы по некоторым программам обучения [37, 38].

Однако в большинстве своем формирование указанного вида деятельности при обучении математике осуществляется в начале изучения систематического курса алгебры и геометрии. Причем традиционный курс алгебры седьмого класса представлен в основном изучением целых выражений, тождественных преобразований одночленов и многочленов. Теоремы, в которых раскрываются свойства степени с натуральным показателем, формулы сокращенного умножения, по структуре заметно отличаются от теорем курса геометрии. Если первые геометрические теоремы импликативны, то теоремы традиционного курса алгебры имеют вид теорем – тождеств. Поэтому формирование знаний о теореме и ее структуре следует выполнять и при изучении теорем курса алгебры, и при изучении геометрии. Только в том случае, когда в курсе алгебры седьмого класса при изучении числовых выражений рассматриваются свойства числовых неравенств, имеющие импликативную структуру [104, с. 22], можно выделять условие и заключение теоремы, подчеркивая общность математических предложений — теорем.

Как видно из примера (табл. 4), построение доказательства основано на умении учащихся выполнять «подведение под понятие» и «выведение следствий». Еще раз отметим важность организации полноценной деятельности по изучению понятия (в данном случае — понятия «доказательства»), и в самом начале обучения школьников доказательству утверждения – иллюстрации сути доказательства. Примеры дедуктивных рассуждений при изучении первых теорем курса геометрии приведены выше (см. с. 14, 74). Опыт показывает, что «свернуть» полное дедуктивное рассуждение уместно после изучения первого признака равенства треугольников. Приведем еще раз пример модели дедуктивного рассуждения в обучении: доказательство первого признака равенства треугольников.

Дано: ΔABC (*), $\Delta\ \Delta A_1B_1C_1$(**),

$AB=A_1B_1$ (***),

$AC=A_1C_1$(****),

$\angle A=\angle A_1$(*****), (рис.25).

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.

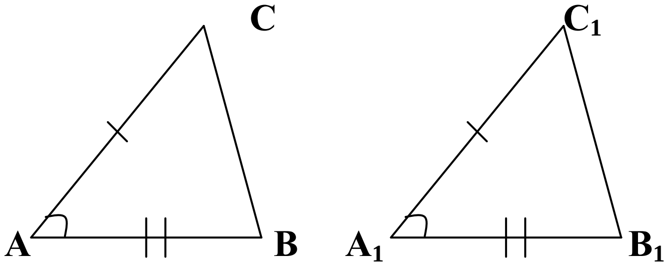


Рис. 25

Эта теорема, как правило, пятая в курсе планиметрии [101], может быть эффективно использована в качестве средства формирования действия «осуществление доказательства» ДИУ. К этому моменту данное действие в основном оказывается сформированным у большинства учащихся, у всех семиклассников, по крайней мере, на уровне представления. Краткость изложения доказательства в указанном учебнике, с одной стороны, и трудность доказательства, с другой, служат убедительной мотивацией всех учащихся в проведении аргументированного полного рассуждения при изучении теоремы, а используемое средство иллюстрирует его значимость и результативность в обучении школьников доказательству. Систематическое планирование осуществления этого учебного действия способствует воспитанию познавательной привычки к полному обоснованию истинности утверждения.

Семиклассники адекватно оценивают приведенное рассуждение — доказательство признака равенства треугольников (см. ниже табл. 5). Большая посылка «свойство верного числового равенства» — суть свойство транзитивности отношения равенства. Таким образом, формирование действия «осуществление доказательства» ДИУ считается состоявшимся и можно свернуть дедуктивное рассуждение, используя сложившееся традиционное оформление доказательство в форме «основание» – «тезис» [130, с. 65].

Доказательство: Таблица 5

№	Малая посылка	Большая посылка	Утверждение
1	ΔABC (*), $\Delta A_1B_1C_1$(**)	Аксиома существования треугольника, равного данному (рис. 25 а)	$\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_2$, B_2 лежит на $[A_1B_1)$, а C_2 лежит в одной полуплоскости с C_1 относительно (A_1B_1)
2	$\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_2$	В равных треугольниках соответствующие стороны и углы равны	$AB = A_1B_2$, $AC = A_1C_2$, $\angle BAC = \angle B_2A_1C_2$
3	$AB = A_1B_2$, $AB = A_1B_1$ (***)	Свойство верного числового равенства	$A_1B_1 = A_1B_2$
4	$A_1B_1 = A_1B_2$	Аксиома откладывания равных отрезков (рис. 25 б)	$B_2 \equiv B_1$, т.е. вершина B_2 совпадает с вершиной B_1

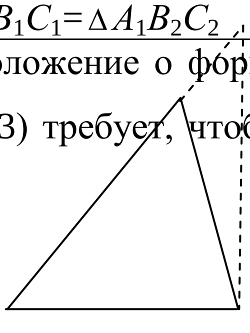


Рис. 25 (а)

Рис. 25 (б)

№	Малая посылка	Большая посылка	Утверждение
5	$\angle BAC = \angle B_2A_1C_2$, $\angle A = \angle A_1$ (*****)	Свойство верного числового равенства	$\angle B_2A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$
6	$\angle B_2A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 25 б)	Аксиома откладывания равных углов	$A_1C_2 \equiv A_1C_1$, т.е. лучи A_1C_2 и A_1C_1 совпадают и C_2 лежит на A_1C_1 (рис. 25 в)

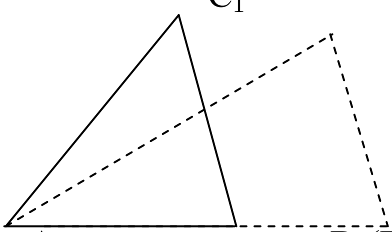


Рис. 25 (в)

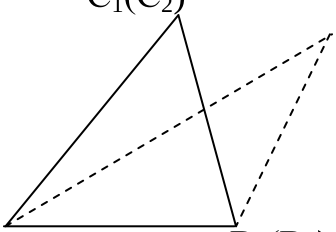


Рис. 25 (г)

№	Малая посылка	Большая посылка	Утверждение
7	$AC = A_1C_2$, $AC = A_1C_1$ (****)	Свойство верного числового равенства	$A_1C_2 = A_1C_1$
8	$A_1C_2 = A_1C_1$	Аксиома откладывания равных отрезков	Вершина C_2 совпадает с вершиной C_1 (рис. 25 г)
9	$\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_2$, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_1B_2C_2$	Свойство верного числового равенства	$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать

Положение о формировании познавательного инструментария учащихся (см. с. 33) требует, чтобы для осуществления действия поиска доказательства ученик *знал* его смысл[17] и операциональный состав (см. выше с. 89 и ниже с. 95). Аналогично для формирования действия осуществления доказательства учащиеся должны знать, что такое доказательство и как его построить. «Открытие» доказательства учащимися требует знания ими процедуры дедуктивного выведения из условия теоремы ее заключения, а для доказательства формулы — выведения истинности утверждения, заключенного в ней (см. с. 64).

Если предыдущее действие реализовано в полном объеме, т.е. посредством рассуждения методом восходящего анализа поиск достаточных условий доведен до условия теоремы, то теорема, доказана[18] (или задача решена). В случае, когда найдена идея доказательства, данное действие выполняется синтетическим методом. Однако формирование действия доказательства утверждения, одного из составляющих познавательного инструментария, которым должен овладеть *каждый* ученик, следует начинать (и при необходимости постоянно к нему обращаться) с дедуктивного вывода.

4.3.2. Структура действий деятельности «изучение утверждений»

Изучение утверждения как деятельность состоится в результате выполнения пяти действий (см. с. 89), каждое из которых соответствует *частной цели*, определенной мотивом ДИУ:

1) «открыть» новое свойство изучаемого понятия;
2) сформулировать открытое свойство как математическое предложение;
3) «открыть» доказательство истинности сформулированной теоремы;
4) выполнить доказательство;
5) исследовать результат деятельности.

<u>Первая цель</u> задает действие «*обнаружение свойства, его формулировка*». Его структуру составляют операции:

[17] Действие поиска доказательства теоремы — рассуждение, аналогичное поиску решения арифметической задачи. Школьники достаточно успешно усваивают, начиная с начальной школы (если этому целенаправленно обучать), как ставить себе вопросы и отвечать на них. Умение «решать задачу с конца» означает построение рассуждения: цепочки достаточных условий для ответа на главный вопрос задачи (см. ниже, с. 107).

[18] Метод восходящего анализа, как известно, является методом доказательства [75, с. 52].

- выдвижение гипотезы (индивидуально или в групповой работе на основе выполнения упражнений, подводящих к «открытию» нового свойства изучаемого объекта);
- обобщение результатов индуктивного поиска нового свойства;
- формулировка теоремы.

Вторая цель задает действие «*изучение структуры математического предложения*». Это действие реализуется следующей совокупностью операций:

- формулировка предложения в логической форме (выделение условия и заключения для импликативной теоремы);
- установление вида теоремы;
- символическая запись теоремы (конкретизация формулировки в принятых символических обозначениях, в том числе выполнение чертежа).

Третья цель задает действие «*поиск плана доказательства*». Целенаправленным поиском доказательства теоремы является, как известно, восходящий анализ. Схема восходящего анализа: $A_n \Leftarrow A_{n-1} \Leftarrow \ldots \Leftarrow A_2 \Leftarrow A_1 \Leftarrow S$, где A_n – доказываемая теорема; $A_{n-1}, \ldots, A_1$ – достаточные условия, основанные, как правило, на действии «подведение под понятие (или под другой факт теории)»; S – совокупность истинных предложений: условие импликативной теоремы или компоненты предиката (см. с. 60). Поэтому совокупностью операций, составляющих это действие, является формулирование достаточных условий $A_{n-1}, \ldots, A_1$. Причем идея доказательства может быть открыта на каком-либо A_k достаточном условии, и поиск плана доказательства завершается его формулировкой.

Четвертая цель задает действие «*доказательство утверждения*». Построение силлогизмов — операции, составляющие действие «доказательство утверждения». Как видно из примера, эти операции представляют собой «подведение под понятие» и «выведение следствий». Их упорядоченный синтез – доказательство. Этот момент убедительно показывает взаимосвязь и взаимообусловленность двух видов математической деятельности учащихся. Действия ДВП способствуют формированию действия «доказательство утверждения», а формирование этого действия ДИУ неявно (а можно при необходимости его использовать явно) служит мотивацией ДВП, изучаемых в дальнейшем.

Как следует из вышесказанного (с. 64 – 67, 89 – 94), операциями, составляющими это действие, являются дедуктивные выводы — построение цепочек силлогизмов в их полном или кратком виде. Как отмечено выше, эти операции осуществляются на основе правил логического вывода. Их синтез представляет доказательство утверждения.

Наконец, пятая цель задает действие «*изучение результатов деятельности*». Это действие выполняется на основе сформированных у учащихся общих действий контроля и оценки и реализуется следующей совокупностью операций:

- выведение частных следствий;
- выведение следствий теоремы или ее обобщение;
- поиск различных способов доказательства теоремы.

«Выведение частных следствий» в практике обучения принято называть первичным закреплением. Это решение задач с дидактической функцией. В условиях таких задач обычно задается ситуация, аналогичная теореме. Использование изученной теоремы в качестве обоснования позволяет получить требуемое заключение (тезис). Например, для изучения результатов деятельности по изучению свойства арифметического квадратного корня (см. с. 89) фигурируют различные вариации значений переменных a и b и выражений: $\sqrt{a \cdot b}$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Как правило, такие упражнения достаточно полно представлены в учебниках.

Выведение следствий теоремы и ее обобщение основано на рассмотрении частных случаев, т.е. связано с научными методами индукции, классификации, конкретизации. Различные способы доказательства теоремы получаются при подборе разных достаточных условий в структуре метода восходящего анализа, если осуществляется *оценка* найденного способа доказательства.

Выделение структуры деятельности по изучению утверждений, операционального состава действий, посредством которых она осуществляется, выпукло показывает тот познавательный инструментарий, которым должны овладеть учащиеся. Это «знания о знаниях». Во-первых, ДИУ будет сформирована у школьников только в том случае, если они овладеют знаниями:

- о теореме как утверждении, истинность которого доказана;
- о видах теорем, полученных классификацией по их логической структуре;
- о доказательстве как цепочке истинных умозаключений, идущих от исходных посылок к доказываемому тезису.

Во-вторых, формирование ДИУ зависит от знаний учащихся о методах анализа (восходящего и нисходящего) и синтеза, а также об индуктивных и дедуктивных умозаключениях и от умения их применять (сформированность соответствующих компетенций). Наконец, овладение отмеченными знаниями и методами невозможно без использования математического языка: символов, обозначающих понятия, отношения и операции.

4.4. Процесс решения задачи как вид деятельности учащихся

4.4.1. Роль и функции задач в обучении математике

Задачи в обучении математике, как известно, занимают важное место, являясь и целью, и средством обучения [75]. Их роли и значению, проблеме обучения решению посвящены многочисленные исследования ведущих отечественных ученых как в области методики преподавания математики [20, 25, 50, 52, 56, 83, 113, 126 и др.], так и в психологии, и дидактике [8, 55, 73, 136, 137 и др.]. В современной методической литературе можно найти описание различных аспектов, связанных с задачами: типизация задач, влияние задач на развитие мышления, способы оформления решения задач, приемы аналитико-синтетического решения. Степень сложности и трудности задач, выделение ориентировочной основы выполнения действий по решению задач, установление основного отношения в задачах, нахождение внешней и внутренней структуры задач и связи между ними — эти и другие вопросы служат предметом пристального внимания исследований в области методики преподавания математики [17, 29, 34, 52, 56, 72, 129 и др.].

В целях данного исследования остановимся на роли, функциях задач в обучении математике как некотором обобщении значения задач в изучении понятий и их свойств. Отмечая обучающий характер каждой задачи, решаемой школьниками в процессе обучения, а также тот факт, что всякая решаемая учениками задача «должна учить их умению ориентироваться в различных проблемных ситуациях, обогащать их знания и опыт, учить их математической деятельности» [75, с. 162], авторы выделяют главное — «такого рода деятельности нужно обучать!» [Там же].

Сегодня, как и тридцать лет назад, в методике обучения решению задач проявляется значительная забота о применении математических знаний и не обращается внимание на процесс актуализации этих знаний. Под процессом актуализации знаний понимается выбор из прошлого опыта нужных сведений и методов и использование их в новых условиях [112]. Такой выбор эффективно осуществляется, на наш взгляд, в ходе рассуждения методом восходящего анализа. При этом не нарушается единство процесса математического мышления и, следовательно, обеспечивается его должное развитие у школьников[19]. Одной из четырех основных черт, отличающих интеллект от простой способности вычислять, Д.М. Маккей выделяет «способность управлять поисковым и исследовательским процессом, руководствуясь «чувством близости решения» [цит. по: 75, с. 163]. Все это говорит в пользу метода восходящего анализа, составляющего действие поиска плана решения задачи (доказательства утверждения).

Использование задач для мотивации деятельности учащихся при введении понятий и изучении теорем показывает их роль в создании проблемной ситуации. Осуществление действий «определение понятия», «открытия» свойства изучаемого понятия выполняется установлением закономерности при выполнении заданий. Задания, упражнения — это задачи в широком смысле этого слова

[19] С.Л. Рубинштейн учит, что мышление — это актуализация и применение знаний, которые являются единым процессом.

[56]. Действие «подведение под понятие» реализуется посредством задач «на распознавание», задач с дидактической функцией [83].

4.4.2. Структура процесса решения задач

Процесс решения задачи (ПРЗ) мы рассматриваем как третий вид деятельности учащихся при обучении математике. В этом случае деятельность осуществляется для усвоения новых математических фактов (понятия или его свойства, алгоритма, метода). Причем данная потребность учащимися часто не осознается, но математические задачи как средство создания проблемной ситуации являются незаменимым способом мотивации школьников. Смыслообразующим мотивом *процесса решения задачи*, побуждающим фактором является нахождение решения задачи. Общая цель деятельности — нахождение ответа на главный вопрос задачи, задает следующие действия:

1) изучение структуры задачи;
2) поиск плана решения задачи;
3) осуществление плана решения (синтез);
4) проверка решения задачи;
5) изучение полученных результатов.

Начиная с работы Д. Пойа [102], обозначившего структуру и содержание процесса решения задачи, исследование проблемы обучения решению задач продолжаются. Детализируются, углубляются, расширяются на основе имеющейся полувековой теории этого вопроса в методике преподавания математики списки приемов работы учителя и желаемых приемов работы учащихся [20, 40, 50, 52, 61, 72, 129 и др.]. Выводы о «необходимости воспитания у учащихся культуры решения задачи» [72, с.45] бесспорно верны. И в то же время они показывают, что на современном уровне развития методической науки и практики обучения математике эта проблема остается нерешенной.

Причина видится в том, что идея воспитания *познавательных привычек* (формирования познавательного инструментария) при обучении решению задачи в традиционном обучении реализуется слабо. Как показывает в том числе данное исследование, она присуща деятельностному подходу к обучению. Чтение задачи, сопровождающееся построением ее наглядной модели (краткой записи, рисунка, чертежа), в которой выделены условие и требование (вопрос) задачи, означает наращивание операций, составляющих действие «изучение задачи» — первое действие ПРЗ (см. с. 45, 102–105). Обучение чтению математического текста, а задача является таким текстом [56, 96], следует начинать в том месте, где он появляется впервые, — в начальной школе.

Также обстоит дело и с обучением поиску способа решения задачи — второго действия процесса решения задачи. Запаздывание на год–два ведет к дифференциации учащихся по уровню их математических способностей, которые зависят от свернутости процесса мышления [55]. И, как следствие, при организации работы над задачей на уроке возникают трудности руководства учителем функционирования деятельности учащихся всего класса. Дети, имеющие задатки, склонность к математике, исподволь, стихийно, действуя по образцу, который они улавливают в действиях учителя, научаются изучать структуру задачи. Другие — нет. Поэтому к 5–6 классу первые опережают одноклассников и на этапе изучения задачи, и на этапе поиска плана решения. Учитель математики в пропедевтическом курсе может ценой огромных усилий исправить эту ситуацию, используя имеющийся познавательный инструментарий (см. ниже, например, с. 103–106). Но, как показывают результаты современного контроля подготовки выпускников средней и особенно основной школы, деятельностью по решению задач (и математическими знаниями) многие из них не овладевают. Несмотря на имеющиеся многочисленные исследования по методике работы над задачей в обучении математике, представляется необходимым изложение этого вопроса с позиции деятельностного подхода к обучению — понимания деятельности как системы действий и составляющих их операций.

Действие 1. ИЗУЧЕНИЕ СТРУКТУРЫ ЗАДАЧИ

Понимание задачи – первая цель деятельности учащихся при ее решении.

Цель порождает соответствующее действие, которое осуществляется различными операциями. Результатом выполнения этого действия должно стать уяснение учеником фабулы задачи; осознание (познание) смысла отдельных слов и выражений, зависимости между данными задачи; видение связи данных с личным опытом, жизнью; осмысление условий, при которых возможна данная задачная ситуация; выделение главного вопроса задачи.

Сущность действия заключается в том, что ученик, выполняя его, понимает текст задачи. Это выражается в умении выделять структуру задачи (условие, вопрос или требование); в видении зависимости между данными и искомыми величинами, в выделении главного вопроса задачи, в умении отразить структуру задачи, выбирая одну из моделей. Операции, составляющие действие изучение структуры задачи, следующие: а) чтение задачи; б) выделение условия и главного вопроса (требования) задачи; в) анализ текста задачи (внутренняя деятельность, результат ее материализованных действий — модель). Способ построения модели — результата анализа текста — зависит от сюжета (содержания) задачи. Представим примеры различных моделей задачи.

Пример 1. Задача на движение

Мотоциклист проехал до места назначения 330 км. В первые 3 ч он ехал со скоростью 60 км/ч, остальной путь он проехал за 2 ч. Во сколько раз скорость на втором этапе пути была больше, чем на первом?

А. Табличный способ

При обучении табличная модель, как и любая другая (см. ниже), составляется по ходу диалога учителя и учащихся по тексту задачи. При этом учитель на нескольких первых уроках демонстрирует вопросы, которые следует

Таблица 6

? *Во сколько раз скорость на II этапе больше, чем скорость на I этапе?*

	Скорость	Время	Расстояние
I этап	60 км/ч	3 ч	… км
II этап	… км/ч	2 ч	… км

330 км

задавать при изучении текста задачи:

– Какие объекты фигурируют в тексте задачи?

– О каком процессе (явлении) идет речь в задаче?

– Какие величины имеют место в этом процессе, каковы их значения?

– Что известно о соотношении этих величин? Ию т.п.

После решения задачи, в которой деятельность учащихся была явно управляема учителем (действие учеников «изучение структуры задачи» не функционировало), следует акцентировать внимание учащихся на вопросах, которые задавал учитель для достижения цели: понимания текста задачи. Усвоение, запоминание этих вопросов — ориентировочная основа действия «изучение структуры задачи». Приведенный небольшой перечень вопросов составляет тот познавательный инструментарий, который способствует формированию познавательной привычки — внимательному, осознанному чтению текста задачи. С другой стороны, привычка читать вдумчиво задачу представляет первую операцию рассмотренного действия.

Следующая операция (и другая познавательная привычка) — моделирование задачной ситуации — наглядное изображение объектов (величин) и связей между ними в виде краткой записи задачи, схемы, рисунка. Результатом правильного понимания условия задачи является заполнение таблицы 6 (см. с. 102). Другие возможные примеры результата выполнения этой операции, приведены ниже:

Б. Краткая схематическая запись

Скорость на I этапе	– 60 км/ч
Время на I этапе	– 3 часа
Время на II этапе	– 2 часа
Весь путь	– 330 км

? *Во сколько раз больше скорость на II этапе, чем*

В. Схематический рисунок

Последняя форма записи — схематический рисунок (рис. 26) — наиболее наглядна и потому представляется более целесообразной. Наглядность модели способствует целостному восприятию явления, осознанию взаимосвязей между данными условия и искомой величиной, ориентации на поиск способа решения задачи и даже, в данном конкретном случае, на способ нахождения искомого.

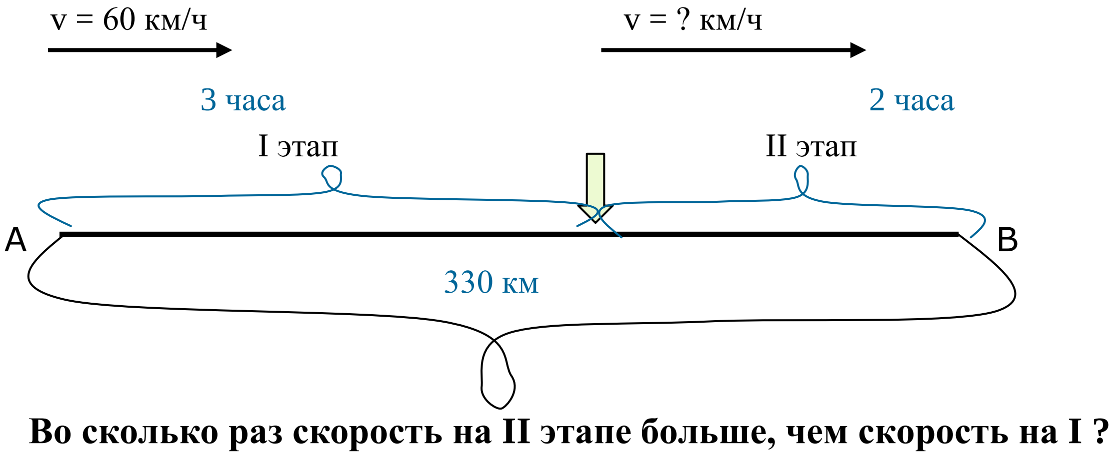


Рис. 26

<u>Пример 2.</u> <u>Задача на дроби</u>

В магазин завезли фрукты и продали их за три дня. В первый день продали 30% всех фруктов, во второй день – $\frac{2}{5}$ *остатка, а в третий день – остальные 168 кг. Сколько всего килограммов фруктов завезли в магазин?*

Результат достижения цели первого действия (понимание условия задачи) — схема–диаграмма (рис. 27).

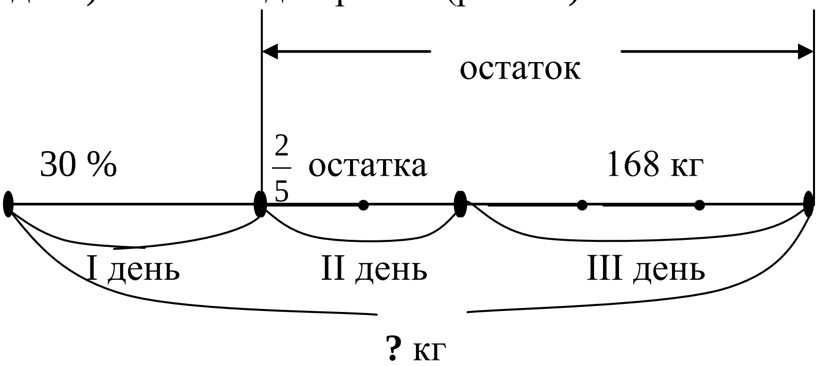


Рис. 27

Наглядная модель ориентирует на разные способы анализа и решения задачи. Приведем три из возможных моделей решения (два числовых выражения и уравнение).

I) $168 : (1 - \frac{2}{5}) : 0{,}7 = 400$ (кг).

II) $168 : (1 - 0{,}3 - 0{,}7 \cdot \frac{2}{5}) = 400$ (кг).

III) $0{,}3x + 0{,}7x \cdot \frac{2}{5} + 168 = x$.

Пример 3. Задача на проценты

Сочинение по русскому языку писали 90 выпускников школы. Им было предложено три темы: по Пушкину, по Маяковскому и свободная тема. Первую тему выбрали на 40% *учеников больше, чем вторую, а третью – на* 50% *больше, чем первую. Сколько учеников писало сочинение по каждой теме?*

Результат первого действия для данной задачи наиболее наглядно представить с помощью линейной диаграммы (рис. 28).

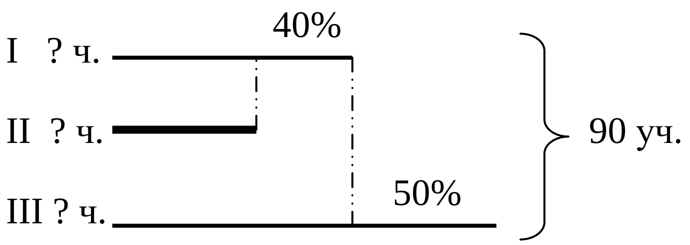


Рис. 28

Диаграмма к тексту задачи легко выполнима, с одной стороны, и способствует получению модели – решения задачи, с другой (рис. 29).

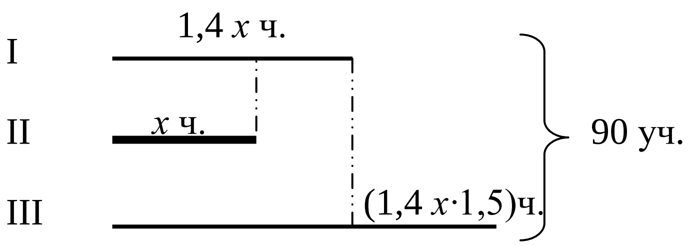


Рис. 29

Пример 4. Задача на движение в одном направлении

Из одного города в другой выехали одновременно автобус со скоростью 53 *км/ч и легковой автомобиль со скоростью* 70 *км/ч. Через* 3 *ч автомобиль прибыл в другой город. Сколько километров осталось ещё проехать автобусу?*

Более целесообразна модель задачи схемой-рисунком, иллюстрирующая характер движения: одновременного и в одном направлении (рис. 30).

Приведенные четыре примера задач показывают явное преимущество представления результата первого действия — изучения текста задачи — схематическим рисунком. Можно говорить о воспитании познавательной привычки «рисовать задачу».

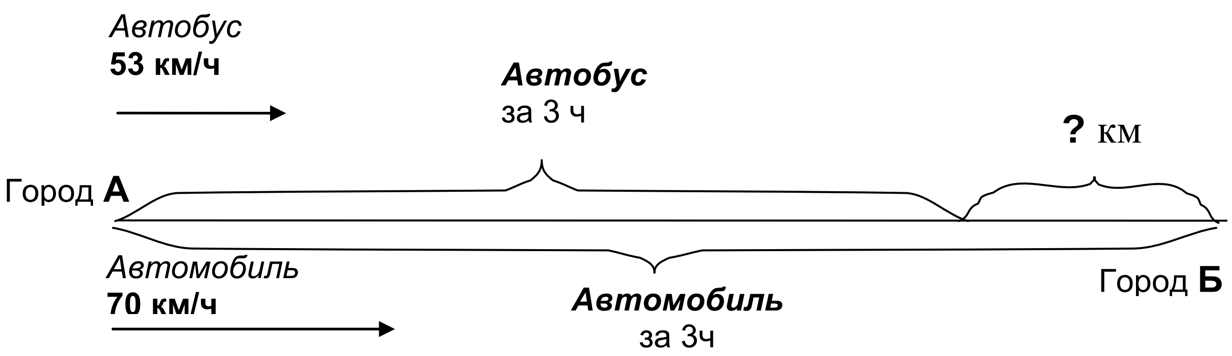


Рис. 30

Действие 2. ПОИСК ПЛАНА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Как показывают методико-математические исследования и опыт обучения школьников решению задач, формирование действия поиска плана решения следует осуществлять на задачах с познавательной функцией [83] и так называемых ключевых (опорных) задачах [44, 130]. Приобретенный опыт и сформированное действие учащиеся применяют в тренировке при решении предлагаемых им задач на уроке и в форме домашнего задания. Выделяя главное в проблеме обучения школьников решению учебных математических задач с точки зрения деятельностного подхода, акцентируем внимание на вопросе формирования действия поиска как обобщенного приема, как эвристического средства решения задачи. Это второе ведущее действие, самое необходимое в познавательном инструментарии школьника и самое трудноформируемое на практике.

Нахождение способа решения задачи — цель, задающая действие поиска плана решения. Наиболее продуктивным, как показывают теоретические исследования [52, 137 и др.], учебные пособия по методике обучения математике [20, 77, 113] и опыт обучения школьников поиску решения задачи [14, 129 и др.], является использование метода восходящего анализа. Подзадачи, появляющиеся в результате рассуждения по схеме восходящего анализа, представляют собой операционный состав действия. Приведем модели действия поиска плана решения — цепочки подзадач целенаправленного рассуждения для двух задач из рассмотренных выше четырех примеров. Построение модели поиска плана решения начинается, как известно, с требования задачи, которое выделено в ходе выполнения предыдущего действия. Для задачи, предложенной в первом примере (рис. 26, с. 103), модель поиска представлена на рисунке 31.

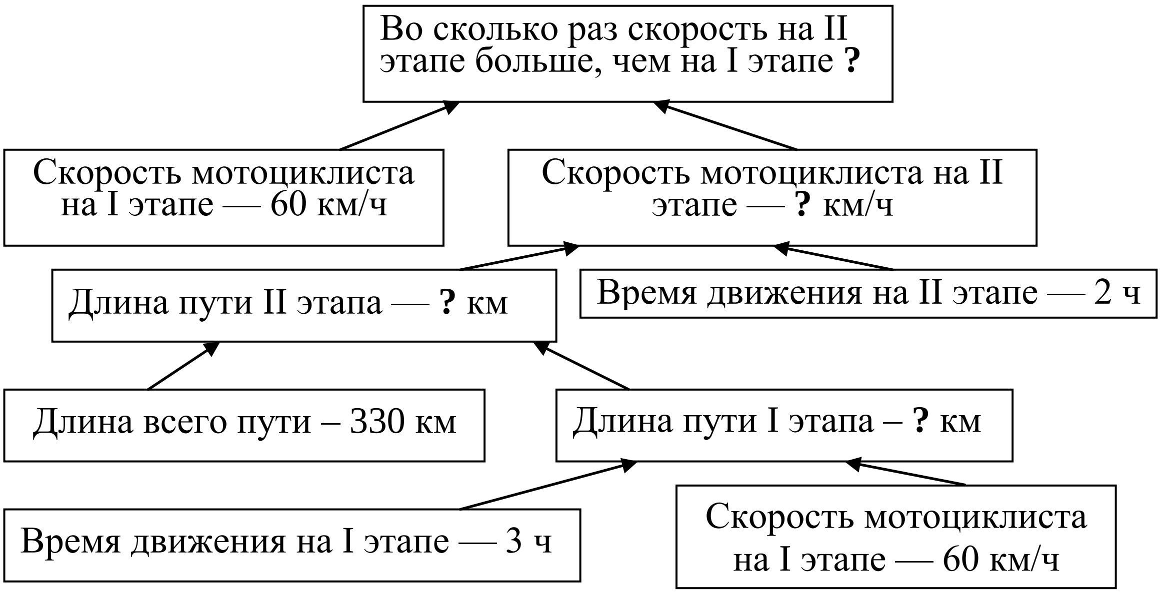


Рис. 31. Схема анализа к задаче примера 1

Ученик мысленно *задаёт* себе вопросы и *отвечает* на них, согласно схеме восходящего анализа:

— Какой главный вопрос задачи?

— Что достаточно знать, чтобы на него ответить?

— Что из этого известно, а что нет? Какой новый вопрос возник?

— Что достаточно знать, чтобы на него ответить?

— Что из этого известно, а что нет? И т.д.

В результате появляется план решения, последовательное нахождение:

- длины первого этапа пути;
- длины второго этапа пути;
- скорости мотоциклиста на втором этапе пути;
- сравнение скорости мотоциклиста на втором и на первом этапах пути.

Для сравнения приведем пример модели действия поиска плана решения задачи менее сложной, по сравнению с первой, с одной стороны, но интересной тем, что она имеет различные способы решения.

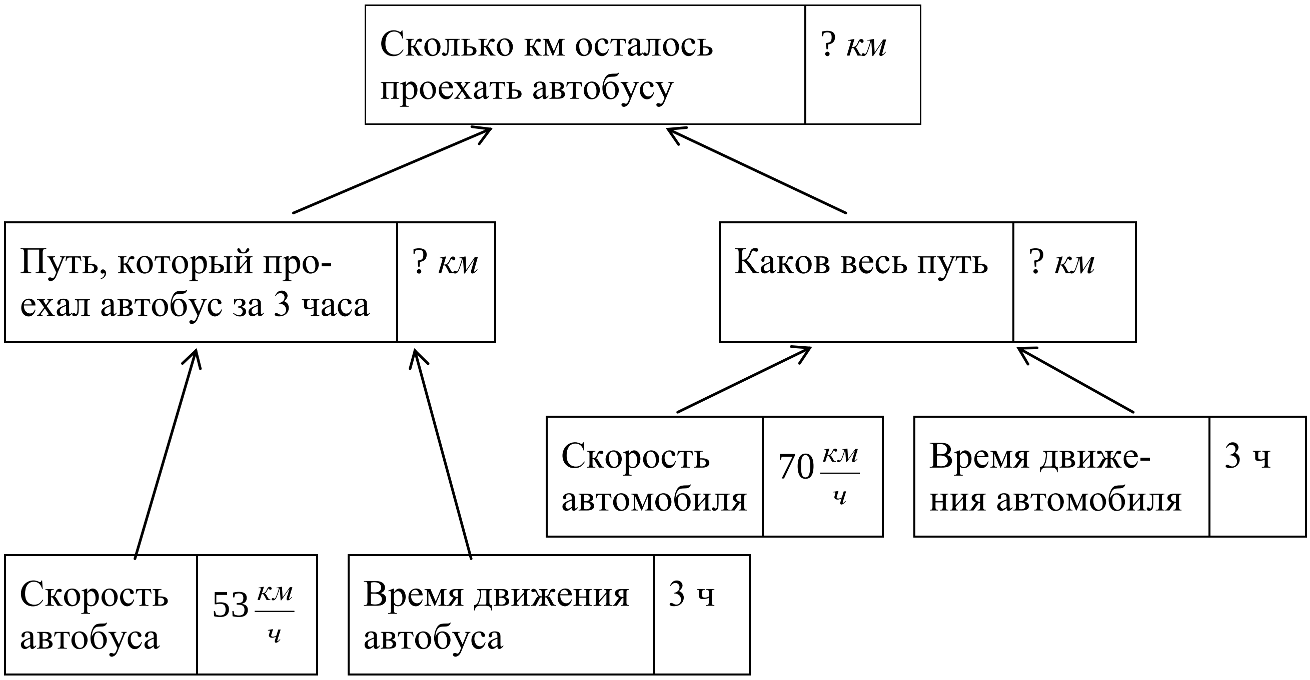


Рис. 32. Схема I анализа к задаче примера 4

Решения задачи упрощается за счет использования понятия скорости сближения.

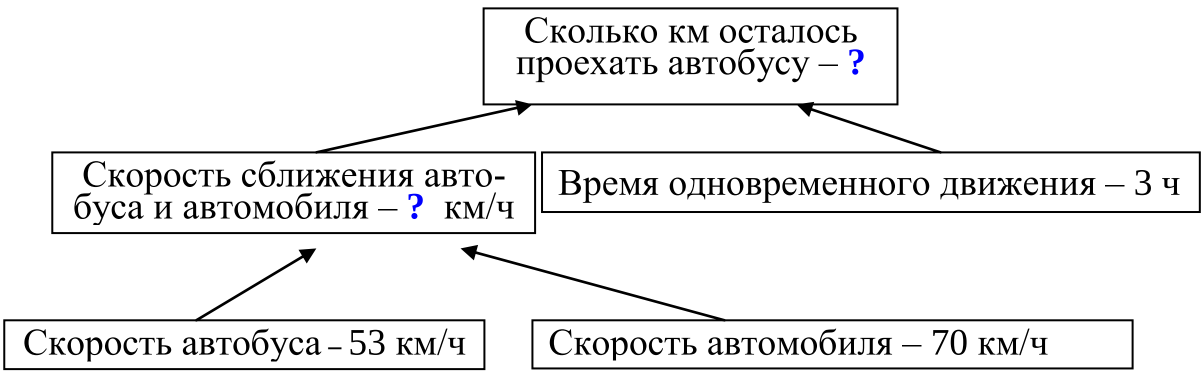


Рис. 33. Схема II анализа к задаче примера 4

В данном исследовании схемы анализа, приведенные выше, используются не только для анализа мыслительной деятельности субъекта [136], не только для формирования представления студентов и учителей о приемах организации поиска способа решения как соответствующего этапа работы над задачей [100]. В большей степени они играют роль средства для воспитания *познавательной* *привычки* — целенаправленного поиска при возникновении проблемной ситуации. Приведенные схемы анализа — модели поиска решения конкретной задачи, а, как известно, действие моделирования относится к общим учебным действиям, присущим учебной деятельности [33], и должно быть сформировано у учащихся уже в начальной школе. Научить ученика задавать себе такие вопросы, которые приводят к данным в условии задачи величинам и их значениям, — в этом суть формирования действия поиска плана при решении задачи. Ради этого выделяется процесс решения задачи как вид деятельности, в котором формируется действие поиска. Его значение важно и потому, что оно идентично по структуре с действием поиска плана доказательства утверждения, а деятельность ПРЗ по структуре близка ДИУ.

Однако наблюдения и личный опыт работы в 5–6 классах показывают, что это действие — проведение рассуждения методом восходящего анализа — не бывает сформировано *у каждого* ученика. Оно проявляется в свернутом, неосознанном виде у наиболее подготовленных школьников. Возникает противоречие: оказывается, что в начале обучения математике в средней школе (в пятом классе) учащиеся не владеют действием, без которого процесс решения задачи как деятельность функционировать не может. Но и сегодня считается, что организуемая работа по решению задачи — деятельность. Чья? Совместная деятельность учителя и учащихся? И снова вопрос: не запаздываем ли мы с передачей выполнения этой деятельности «самому ученику для самостоятельного осуществления без вмешательства учителя» [150, с. 53]?

Для формирования у школьников действия анализа (поиска плана решения задачи*) однажды* каждый ученик *должен осознать*, что следует знать общий приём рассуждений, который приведёт его к плану решения задачи. В такой момент появляется мотив деятельности, направленной на овладение методом восходящего анализа. Именно в этой ситуации «срабатывают» сформированные в учебной деятельности школьников действия «преобразования ситуации для обнаружения всеобщего отношения рассматриваемой системы» и «моделирование выделенного отношения в предметной, графической и знаковой форме» [33, с.15]. Осуществить мотивацию для изучения сущности поиска плана решения задачи (развернуть действие в деятельность — по А.Н. Леонтьеву) можно на задаче, решение которой вызывает у учащихся познавательное затруднение — проблемную ситуацию. Примером такой задачи является, например, для пятиклассников и задача, модель поиска которой представлена на рис. 26, и следующая достаточно сложная задача.

Лодка, скорость которой в стоячей воде 12 $\frac{км}{ч}$, *шла по течению реки* 3 *часа. <u>Найти время, затраченное лодкой на путь, пройденный против течения</u>, если его длина на* 8 *км больше пути, пройденного по течению реки, а скорость течения реки* 4 $\frac{км}{ч}$.

Модель поиска (рис. 34) может быть построена учащимися пятого класса в

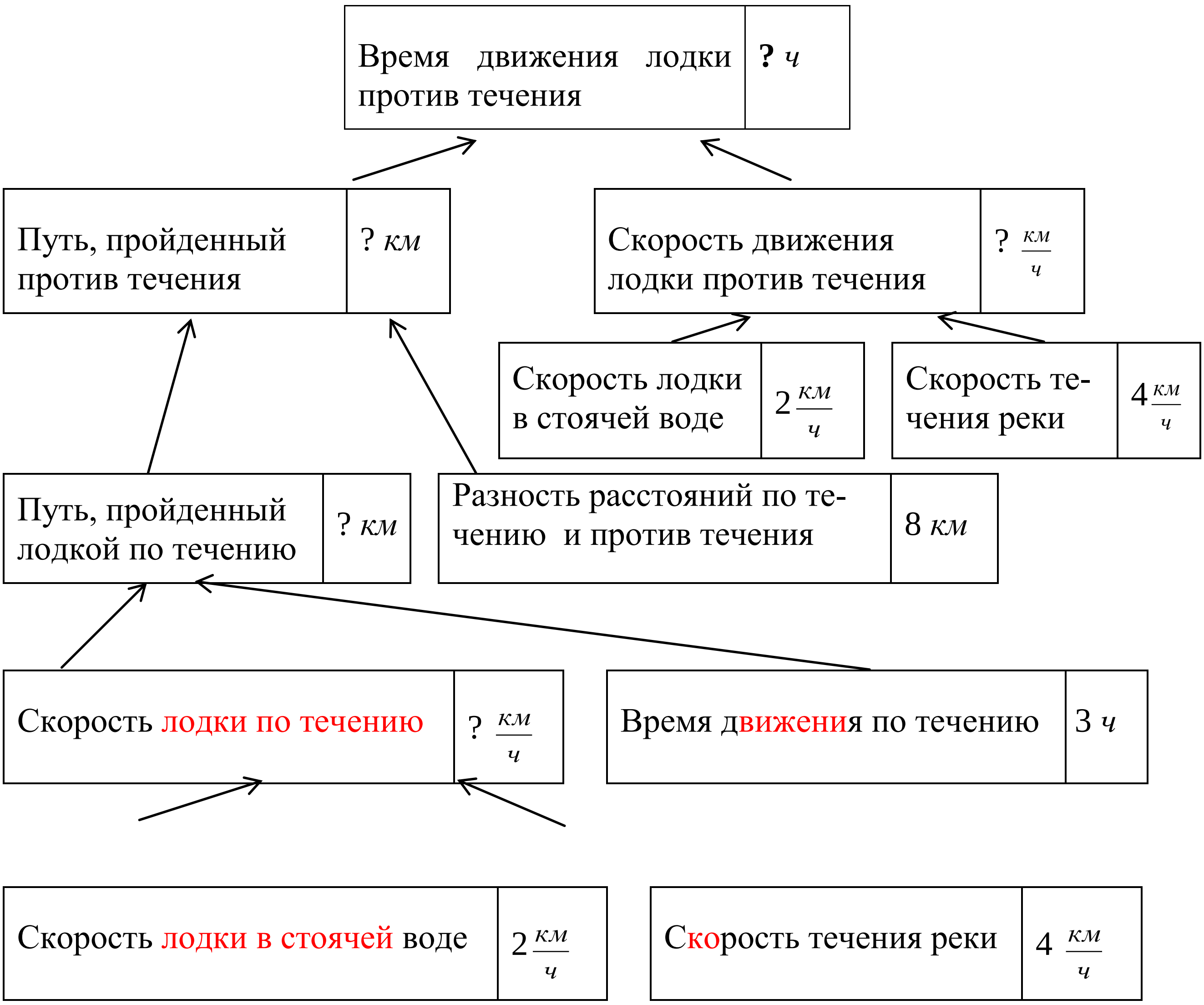


Рис. 34

групповой работе или в совместной работе с учителем.

Выполнение действий контроля и оценки, предполагающее «обращение внимания школьника к содержанию своих собственных действий, к рассмотрению их особенностей с точки зрения требуемого задачей результата» [33, с. 19], называемое рефлексией, является существенным условием формирования деятельности (действий) учащихся. Неоднократное и целенаправленное использование модели поиска в проблемных ситуациях (а таковые возникают часто как на уроке, так и при выполнении домашней работы) позволяет учащимся выделить и осознать операционный состав действия по отысканию пути решения задачи (метод восходящего анализа), положительно оценить и принять его.

К сожалению, результаты итоговых испытаний последних лет показывают, что такими действиями, как изучение условия задачи и поиск плана ее решения учащиеся овладевают слабо, а это значит, что самостоятельно решить сколько-нибудь новую задачу они не могут. Поэтому формирование этих действий должно быть целенаправленным, планомерным и систематическим в начальной школе. В пятом и шестом классах «процесс постепенной передачи выполнения отдельных элементов этой деятельности самому ученику» [150, с. 53] должен быть завершен.

Действие 3. ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПЛАНА РЕШЕНИЯ

Третье действие — осуществление плана решения задачи, как правило, не вызывает у учащихся особых затруднений, если найден план решения задачи (выполнено второе действие ПРЗ). Необходимо провести лишь пошаговое выполнение всех пунктов плана решения. В мыслительном плане школьники осуществляют синтез. Модель решения задачи может быть следующей:

$(У_1\&У_2\Rightarrow П_1)\& \ldots (У_i\&П_к\Rightarrow П_m)\Rightarrow\ldots \Rightarrow П_n\&У_j\Rightarrow\ldots\Rightarrow Т$, где $У_i, У_j$ – условия задачи, $П_1$, $П_2$, … , $П_n$ – подзадачи данной задачи, следующие из условия (условий) на основе ранее известных фактов, Т – требование задачи.

На рисунках 35 и 36, а также в приведенных ниже решениях (с. 104–105) представлены модели синтеза — различные способы осуществления решения задачи четвертого примера (см. ниже, с. 113).

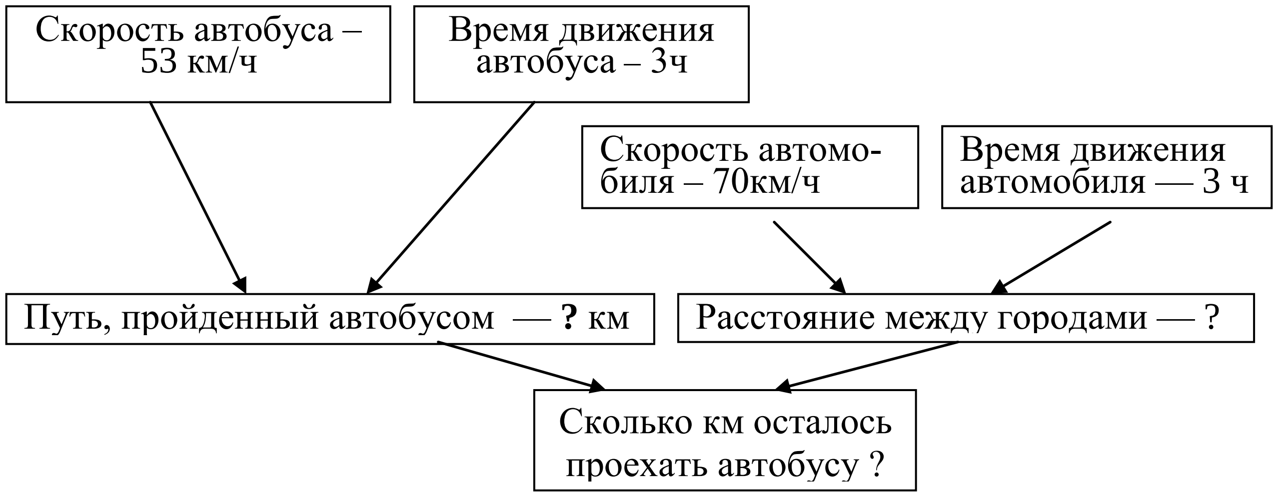


Рис. 35. Схема синтеза к задаче примера 4 (решение 1)

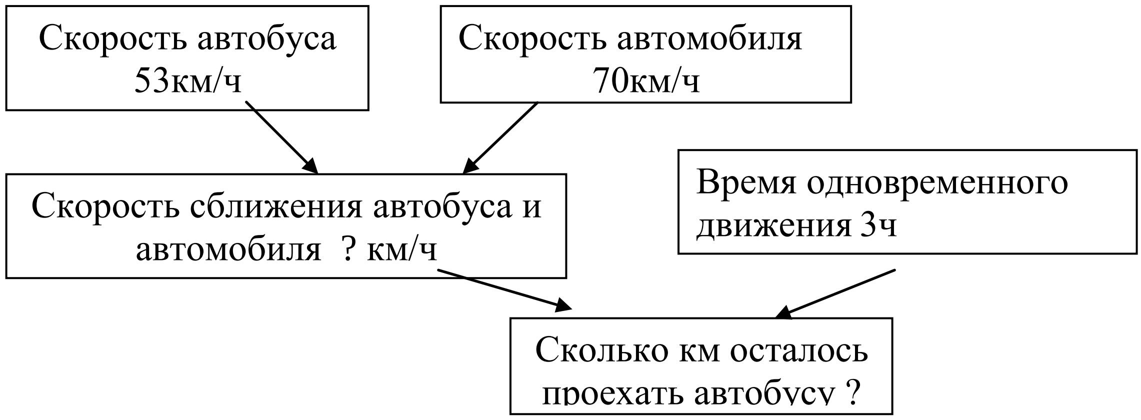


Рис. 36. Схема синтеза к задаче примера 4 (решение 2)

Решение в вопросно-ответной форме (вторая модель синтеза)

1. Какова длина пути автобуса за 3 часа?

   $53 \cdot 3 = 159$ (км)

2. Какова длина всего пути?

   $70 \cdot 3 = 210$ (км)

3. Сколько километров осталось ещё проехать автобусу?

   210 – 159 = 51 (км)

Ответ: автобусу осталось проехать 51 километр.

Решение с пояснением (третья модель синтеза)

1. $53 \cdot 3 = 159$(км) – длина пути автобуса за 3 часа.
2. $70 \cdot 3 = 210$ (км) – расстояние между городами.

3. 210 – 159 = 51 (км) – осталось ещё проехать автобусу.

Ответ: автобусу осталось проехать 51 километр.

Составление числового выражения (четвертая модель синтеза)

Длина пути автобуса за 3 часа: $53 \cdot 3$(км).

Расстояние между городами $70 \cdot 3$ (км).

Автобусу осталось проехать: $(70 \cdot 3 - 53 \cdot 3)$ км — числовое выражение.

Находят значение числового выражения: $70 \cdot 3 - 53 \cdot 3 = 51$ (км).

Ответ: автобусу осталось проехать 51 километр.

Решение в виде действий (пятая модель синтеза)

1. $53 \cdot 3 = 159$(км) – длина пути автобуса за 3 часа.
2. $70 \cdot 3 = 210$ (км) – расстояние между городами.
3. 210 – 159 = 51 (км) – осталось ещё проехать автобусу.

Ответ: автобусу осталось проехать 51 километр.

Действие 4. ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Общее учебное действие контроля выполнения предыдущих действий (см. с. 5) в деятельности ПРЗ имеет *целью* выяснить, согласуется ли найденный результат (числовое значение выражения, корня уравнения или устанавливаемый факт, построенный объект) с условием и требованием задачи, выясняется, правильно ли понята задача. Операции, составляющие это действие, общеизвестны. Во-первых, это *проверка результата по смыслу задачи*. Довольно часто возникают ситуации, когда модель дает вариант ответа, который не подходит по смыслу к условию задачи. Например, скорость, время, расстояние, производительность, работа и другие физические величины не выражаются отрицательным числом; при подсчете предметов или людей получаются натуральные числа и т.п.

Вторая операция — *проверка правильности решения задачи*. Способ проверки зависит от конкретной задачи. В задаче примера 4 проверку можно осуществить путем составления и решения одной из обратных задач. Например:

Из одного города в другой выехали одновременно автобус со скоростью 53 *км/ч и легковой автомобиль. Через* 3 *ч автомобиль прибыл в другой город, а автобусу осталось ещё проехать* 51 *км. Какова была скорость легкового автомобиля?*

На рис. 37 представлена наглядная модель этой задачи, ниже — ее решение.

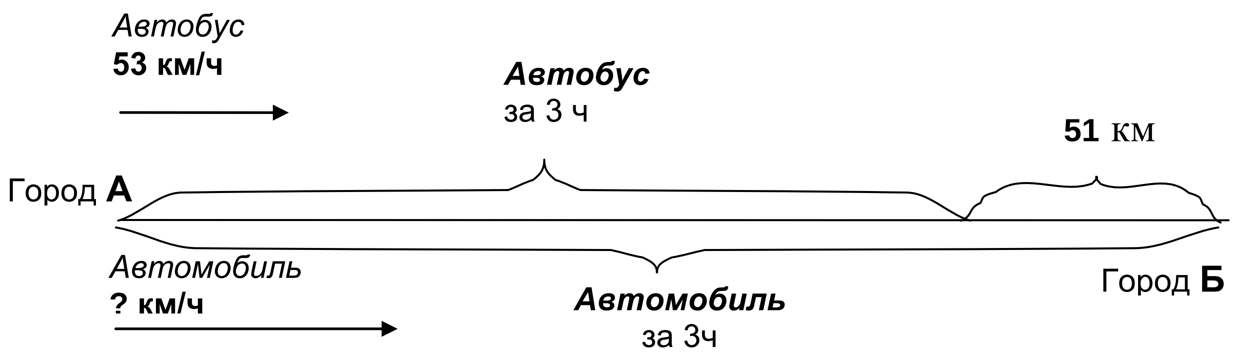


Рис. 37

Решение: $(53 \cdot 3 + 51) : 3 = 70$ (*км/ч*), что соответствует условию задачи. Многолетняя практика преподавания показывает, что многих третьекурсников педагогического вуза приходится *обучать* составлению обратных задач. Это значит, что действие проверки решения задачи, операция проверки правильности решения задачи как познавательная привычка у многих школьников не формируется.

Действие 5. ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Целью данного действия_ПРЗ является рефлексия действий, выполненных учащимися. Оценка способа решения данной задачи — конкретизация общего учебного действия [33]. Структуру данного действия ПРЗ составляют операции: *осмысление* ответа и его *полная запись* и решение задачи *другим способом* (см., например, с. 111). Эти операции являются средством воспитания познавательной привычки завершать работу над задачей, осуществляя «взгляд назад» [102].

4.4.3. Деятельностный подход при обучении решению задач методом уравнений

Процесс решения задачи — деятельность, мотивом которой является потребность понимания того, как найти ответ на вопрос задачи, в частности, как уравнение помогает в этом. Заметим, что этот мотив может и не осознаваться школьниками. Но сегодня актуально в связи с формированием при обучении метода математического моделирования, чтобы этот мотив был осознанным. Целью процесса решения задачи, как описано выше для сюжетных задач, является необходимость выполнить требование, обозначенное в тексте. Действия «поиск плана решения задачи», «осуществление решения и его проверка» несколько изменяются. Поэтому вопросу обучения решению задач с помощью уравнений с точки зрения деятельностного подхода следует уделить особое внимание.

Понятно, что обучение применению уравнений к решению задач должно быть мотивировано. Мотивация осуществляется с осознания учеником собственного незнания, с понимания того, что он не может решать предложенную задачу известным методом. И в начальной школе, и в пропедевтическом курсе математики учащиеся должны овладеть арифметическим способом решения сюжетных (текстовых) задач [88, 107 и др.], что означает сформированность у них в том числе и действия поиска плана решения задачи (см. с. 105 – 110). Поэтому создание мотивационной ситуации с помощью задачи, которая вызывает у ученика непреодолимое затруднение, не столь важно. Проблемная ситуация в данном случае должна показать не просто незнание некоторого факта или метода [см., например, с. 19, 76 и др.], а способствовать осознанию того, что прежний способ рассуждения (правильный, испытанный временем, позволяющий успешно решать задачи) в данном случае не срабатывает. Познавательное затруднение учащихся следует сконцентрировать именно на методе рассуждения, известном им. Средством для такой мотивации деятельности служит способ поиска плана решения арифметической задачи по схеме восходящего анализа.

Проиллюстрируем это, используя задачу и поиск ее решения, рассмотренные выше (с. 109, рис. 34). Схема поиска приводит к арифметическому способу решения задачи. В результате анализа учащиеся формулируют план решения задачи, по которому можно составить числовое выражение: $((12+4)\cdot 3 + 8):(12 - 4)$. Действие поиска плана решения задачи, ранее сформированное у младших школьников, является основой *мотивации* деятельности по изучению алгебраического метода решения задач. Чтобы произошло целеполагание (принятие учащимися цели деятельности), можно рекомендовать решить задачу, которая сыграет роль учебной задачи [33]. Цель изучения метода уравнений может быть поставлена самими учащимися после составления модели поиска решения специально подобранной задачи. Приведем пример задачи для 7-го класса.

Лодка шла по течению реки 3 *часа и против течения* 5 *часов. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на* 7 *км длиннее пути, пройденного против течения.* <u>*Найти скорость лодки в стоячей воде*</u>*, если скорость течения реки* $4\frac{км}{ч}$.

Составление модели поиска плана решения задачи не затрудняет учащихся, это для них известное действие. В результате получается, например, следующая модель рассуждения (рис. 38). Составленная схема обсуждается на уроке. Учащиеся приходят к выводу, что эта задача не сводится к известным величинам из условия задачи. Оказалось, что для ответа на вопрос задачи нужно знать этот ответ. Возник порочный круг. Известный прием поиска не дал результата: план решения задачи не найден. Нужен *новый* способ решения задачи.

Этот момент очень важен в мотивации учения. Возникает осознание учащимися «незнания» – известный способ рассуждения для решения задачи не дает результата. Построение модели поиска, полученной в результате организации учащихся для проведения анализа, приводит их к мысли о том, что следует считать искомое известным – обозначить через x. Тогда результат поиска

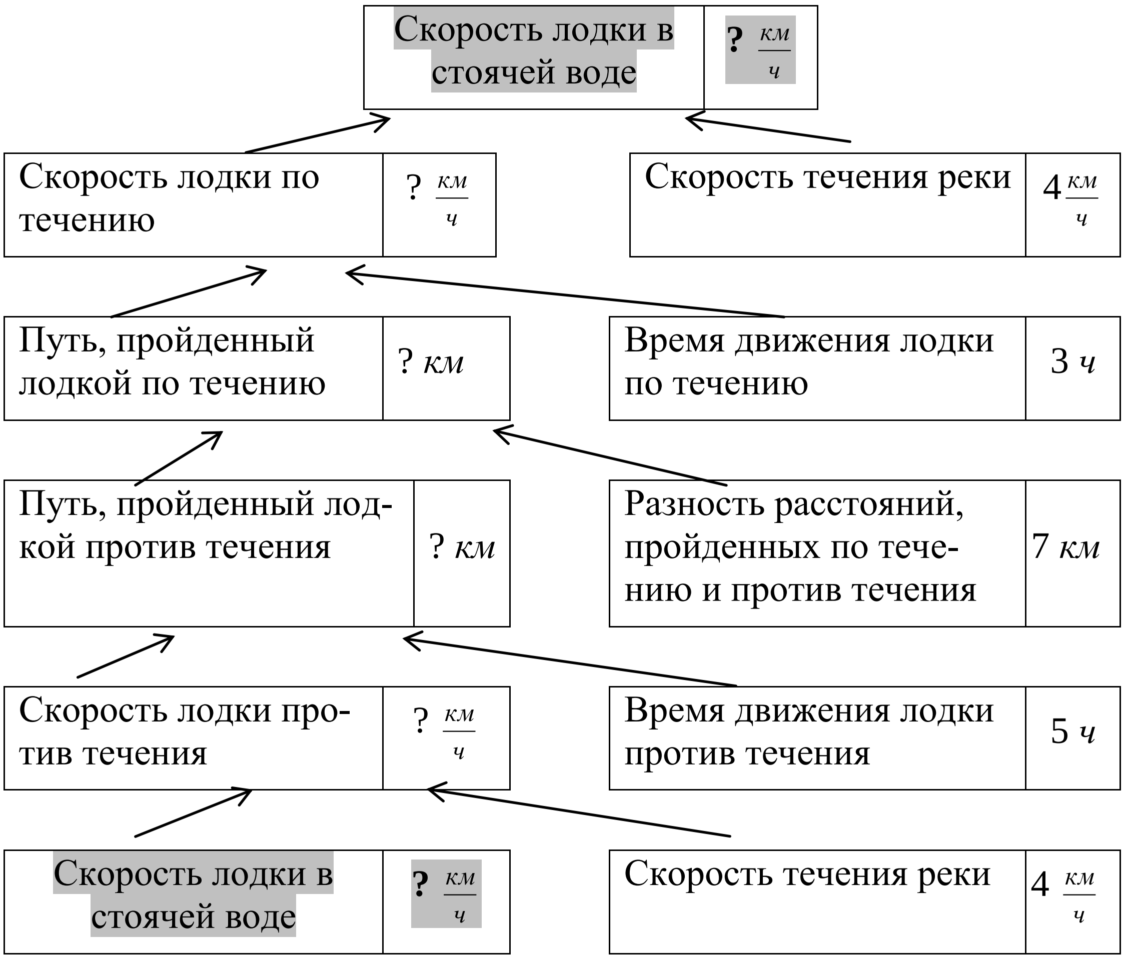


Рис. 38

плана решения приведет к равенству с переменной – к уравнению!

Если учащиеся сами не приходят к этому выводу, учитель может подвести их к идее введения переменной, высказав после некоторой паузы свою «догадку»: «А что, если скорость лодки в стоячей воде считать известной? Пусть скорость лодки в стоячей воде $x\frac{км}{ч}$».

Обычно в качестве неизвестной берут ту величину, о которой идет речь в главном вопросе (требовании) задачи. На первых этапах обучения решению задач методом уравнений этой рекомендации следует придерживаться, так как это, во-первых, проще психологически, во-вторых, после проверки сразу можно дать ответ [110]. Первоначально произвольность выбора переменной обсуждать нецелесообразно.

Таким образом, учащиеся подходят к новому способу решения задачи, к выбору неизвестного и обозначению его переменной: $x\frac{км}{ч}$ — скорость лодки в стоячей воде. Отсюда *с необходимостью* следует (по схеме поиска см. рис. 37): скорость лодки против течения: $(x-4)\ \frac{км}{ч}$. Аналогично: путь, пройденный лодкой против течения $((x-4)\cdot5)$ *км*. Путь, пройденный лодкой по течению $((x-4)\cdot5+7)$ *км*; скорость лодки по течению $(((x-4)\cdot5+7):3)\ \frac{км}{ч}$; скорость лодки в стоячей воде $((((x-4)\cdot5+7):3)-4)\ \frac{км}{ч}$, что равно $x\frac{км}{ч}$. Тогда получится уравнение: $(((x-4)\cdot5+7):3)-4=x$.

Сложность полученного уравнения[20] ориентирует на иной путь поиска плана решения задачи. После выполнения первого действия ПРЗ (изучения задачи), осознания необходимости использования метода уравнений, *главный* вопрос поиска плана решения задачи — значения каких величин равны по условию задачи? Или — установите, какие выражения (значения величин) целесообразно приравнять для составления уравнения [110], позднее можно говорить о составлении схемы уравнения [61]. Обозначив за $x\ \frac{км}{ч}$ — скорость лодки в стоячей воде, можно последовательно найти:

- скорость лодки по течению $(x+4)\frac{км}{ч}$;
- <u>путь, пройденный по течению</u> $((x+4)\cdot3)$ *км*;
- скорость лодки против течения $(x-4)\frac{км}{ч}$;
- путь, пройденный лодкой против течения $((x-4)\cdot5)$ *км*;
- <u>путь лодки по течению</u> $((x-4)\cdot5+7)$ *км*.

Путь, пройденный лодкой по течению реки, равен $((x-4)\cdot5+7)$ км, с одной стороны, а с другой стороны – $(x+4)\cdot3$ км. Значения выражений $(x-4)\cdot5+7$ и $(x+4)\cdot3$ равны, можно составить уравнение: $(x-4)\cdot5+7=(x+4)\cdot3$. Полезно составление учащимися разных уравнений, например:

$$x+4=((x-4)\cdot5+7):3;\quad (x+4)\cdot3-(x-4)\cdot5=7 \text{ и т.п.},$$

и обсуждение полученных результатов.

[20] О сложности уравнения для пятиклассников, а тем более для учащихся начальной школы, свидетельствует структура уравнения. Для его решения следует уверенно владеть решением уравнений путем нахождения компонента действия и свойствами арифметических действий.

Таким образом, план решения задачи, решаемой с помощью уравнения, следующий:

1) выбор неизвестной величины и обозначение ее переменной (буквой);
2) перевод условия задачи на математический язык;
3) составление уравнения (модели) и его решение.

Действие осуществления плана решения задачи завершается решением уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств).

Для решения задачи предпочтение отдается уравнению наиболее простой структуры. Поиск решения задачи, осуществляемый, как видно из рассуждения, *методом нисходящего анализа,* не заканчивается нахождением корня уравнения. Как известно, метод нисходящего анализа завершается синтезом, который в решении задачи с помощью уравнения служит проверкой соответствия найденного корня уравнения условию задачи. Приведем ее.

Если 12,5 $\frac{км}{ч}$ — скорость лодки в стоячей воде, то скорость лодки по течению 16,5 $\frac{км}{ч}$; путь, пройденный лодкой по течению, (16,5·3 = 49,5) *км;* скорость лодки против течения 8,5 $\frac{км}{ч}$; путь, пройденный лодкой против течения, (8,5·5 = 42,5) *км*. *Действительно,* путь, пройденный лодкой по течению, на 7 км длиннее пути, пройденного против течения.

Исследование предмета деятельности — процесса решения задачи с помощью уравнения — явно показывает, что проверка найденного ответа (корня уравнения) по условию является составной частью решения задачи. Таким образом, формирование действия контроля объективно присуще этой деятельности. Поэтому должен восприниматься странным вопрос учащегося к учителю: «Какой ответ в задаче?». Реакция учителя на него должна быть однозначной: «Закончите решение задачи» (что означает – сделайте проверку). И нельзя на проверке экономить время урока, наоборот, следует использовать в полной мере ПРЗ для воспитания школьников: формирования познавательной *привычки* к контролю своей деятельности.

Таким образом, процесс решения задач с помощью уравнений (неравенств, систем уравнений и неравенств) как деятельность обладает большим потенциалом для формирования метода математического моделирования, с одной стороны, и способствуют становлению общеучебной компетентности школьников [21], с другой. Постепенно становится реальностью личностно ориентированная парадигма образования, основанная на компетентностном подходе [88]. Формирование компетентностей требует создания определенных условий организации процесса обучения, которые могут быть реализованы с помощью *деятельности* как процесса, который характеризуется «психологически следующим: то, на что направлен данный процесс в целом (его предмет), всегда совпадает с тем объективным, что побуждает субъекта к данной деятельности, то есть мотивом» [63, с. 518].

Компетентность в процессе решения задачи означает:

1) понимание фабулы задачи, смысла отдельных слов и выражений, структуры задачи; умение устанавливать зависимости между известными и неизвестными величинами, выделять главный вопрос задачи; *привычку* выполнения краткой записи задачи (построения модели);

2) знание сути методов восходящего и нисходящего анализа, умение и *привычку* в их применении для поиска плана решения задачи, опыт в осуществлении действия поиска решения задачи;

3) умение осуществлять выработанный план решения задачи, опыт выполнения этого действия;

4) умение и *привычку* проверять полученные результаты, соотносить их с реальными жизненными ситуациями; опыт выполнения действия изучения полученных результатов.

4.4.4. Локальная система задач как средство реализации деятельностного подхода в обучении математике

Совокупность задач, предназначенных для усвоения изучаемой темы, называют локальной системой задач. В методике преподавания математики сформулированы и обоснованы требования к системе как геометрических [106], так и других видов задач:

1) всестороннее отражение в системе задач признаков изучаемого понятия, свойств фигур во взаимосвязи с ранее изученными фактами посредством следующих задач:

— взаимно-обратные;

— задачи, имеющие различные способы решения;

— задачи «без ограничений»;

— «потенциально полезные».

2) сложность задач локальной системы различна;

3) наличие в системе задач, различающихся формой предъявления;

4) наличие задач с практической, занимательной (для младших школьников) фабулой, межпредметного содержания.

Как правило, задачи в локальной системе задач расположены по их сложности, в соответствии с дидактическим принципом доступности. Под сложностью задачи понимается сложность структурной формулы решения, построенной на основе аналитико-синтетического поиска [106]. Требование наличия задач различной сложности позволяет не только осуществлять дифференцированный подход к обучению, но и развивать, например, умение проводить целенаправленный поиск плана решения задач методом восходящего или нисходящего анализа у учащихся, не владеющих ими.

Деятельность ПРЗ очень подвижна (см. с. 13): она превращается в действие, например, при решении задачи с дидактической функцией: задач на распознавание или задач, ориентированных на формирование алгоритма. В задачах более сложной структуры (задачах с познавательной функцией) у многих учащихся действия превращаются в операции, если способ решения достаточно сформировался у школьника. Например, при решении аналогичных задач, при выполнении самостоятельной или контрольной работы.

В процессе решения «потенциально полезных» и взаимно-обратных задач учащимися устанавливаются существенные связи между знаниями различных разделов курса алгебры, способствующие углублению и расширению их знаний. Процесс решения «потенциально полезных» задач и задач «без ограничений» способствует формированию умений учащихся вычленять, а затем формулировать новые задачи, ставить цели, намечать пути их достижения. Решение задач «без ограничений» развивает способность видеть частные, особые случаи, содействует формированию вариативности мышления. Важно отметить, что задачи «без ограничений» являются средством формирования метода *полной индукции* — одного из видов умозаключений, основанных «на рассмотрении в с е х единичных и частных суждений (случаев), относящихся к рассматриваемой ситуации» [75, с. 96].

Задачи, имеющие более одного способа решения, способствуют развитию эвристической деятельности учащихся. В поиске плана решения таких задач имеется возможность «открывать» способ решения, а не только ориентироваться на прием, используемый в аналогичных ситуациях. Вместе с тем все выделенные задачи показывают первостепенную роль качественно усвоенных знаний и, обратно, процесс решения задач способствует формированию изучаемых понятий.

Приведем пример локальной системы задач к теме «Логарифм числа».

Анализ локальной системы задач по теме «Логарифмы и их свойства» в учебниках алгебры [2] и др. позволяет сделать следующие выводы. Задачи в данной локальной системе расположены от простых к более сложным. Первые задачи системы направлены на усвоение определения логарифма.

1) Проверьте справедливость равенств: $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; $\log_{0,5} 4 = -2$.

2) Используя равенства а) $3^2 = 9$; б) $7^0 = 1$; в) $125^{\frac{2}{3}} = 25$, найдите логарифмы чисел 9; 1; 25 по соответствующему основанию.

3) Отметьте числа на координатной прямой: $\log_2 16$; $\log_3 27$; $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$.

Это задачи с дидактической функцией, процесс решения их — деятельность учащихся, функционирующая на основе изученного определения логарифма числа (в частности, логического действия подведения под понятие). Выполнение этих заданий способствует усвоению учащимися значений логарифмов чисел, часто встречающихся в решении уравнений и неравенств.

Последующие задачи ориентированы на овладение свойствами логарифмов:

- вычислите: lg 8 + lg 125; $\log_{13}\sqrt[5]{169}$; $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10$.

Среди задач данной локальной системы в одном из названных учебников имеются четыре взаимно-обратные [2]. Приведем пример:

1) прологарифмируйте по основанию 3 $(a>0, b>0)$: $9a^4\sqrt[5]{b}$ (№ 491 [2]);

2) найдите *x*, если $\log_6 x=3\log_6 2+0{,}5\log_6 25-2\log_6 3$ (№ 497 [Там же]).

В других учебниках[21] такие задачи отсутствуют.

Задачи, в которых новые понятия и их свойства используются в сочетании с изученными ранее, очень важны для развития самостоятельности учащихся. В анализируемых действующих учебниках таких заданий очень немного. Задачи, имеющие разные решения, «без ограничений» и «потенциально полезные» отсутствуют совсем. Поэтому данная локальная система требует дополнения. Среди задач конкурсных экзаменов, сборников для поступающих в вузы представлены задачи на тождественные преобразования логарифмических выражений. Приведем некоторые из них.

1. Сравните числа $\log_2 5+\log_5 16$ и 4.
2. Вычислите: $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$.
3. Найдите $\log_{54}168$, если $\log_7 12=a$ и $\log_{12}24=b$.
4. Упростите: $\dfrac{1-\log_a^3 b}{\left(\log_a b+\log_b a+1\right)\cdot\log_a\dfrac{a}{b}}$ [15];

[21] Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. ср. шк. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. С. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1994.

5. Отметьте на координатной прямой числа: $\log_4 16$; $\log_5 125$; $\log_2 49$.

Последнее задание – проблема, которая ориентирует на изучение приближенных способов нахождения логарифмов: графический, табличный (В. М. Брадис), с помощью счетной линейки, калькулятора.

В качестве «потенциально полезной» задачи можно предложить следующую: вычислите значение выражения: $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$.

После решения данной задачи учащиеся узнают новый факт, нужный в их дальнейшей математической деятельности: если $a > 1$ и $x > 1$ или $0 < a < 1$ и $0 < x < 1$, то справедливо равенство $a^{\sqrt{\log_a x}} = x^{\sqrt{\log_x a}}$.

В анализируемой локальной системе задач отсутствуют задачи межпредметного содержания. Данная система может быть дополнена следующей задачей:

Докажите, что если ***a*** *и* ***b*** *– длины катетов, а* ***c*** *– длина гипотенузы прямоугольного треугольника, то* $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.

Сформулированные требования к локальной системе задач и их интерпретация, а также, например, приведенный выше анализ задач по теме «Арифметический квадратный корень» (см. с. 79 – 81) показывают, что проблема обеспечения формирования *видов деятельности* учащихся при обучении математике актуальна на современном этапе развития образования. Наш опыт реализации деятельностного подхода к обучению математике основан, в том числе, на использовании локальной системы задач, удовлетворяющих сформулированным требованиям.

Организация деятельности учащихся по усвоению ими полноценных знаний — «знаний как убеждений» и развитию диалектического мышления — требует анализа каждой локальной системы задач и при необходимости ее дополнения недостающими заданиями. В первую очередь это касается упражнений, способствующих воспитанию познавательных привычек к проведению рассуждений методами восходящего и нисходящего анализа, полной индукции, к решению задачи разными способами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложение основных положений психологической теории деятельности, общей структуры деятельности выполнено с использованием иллюстративных примеров из теоретического курса методики преподавания математики и осуществляемой автором практики обучения математике учащихся средней школы, а также методике обучения математике студентов. При этом принцип единства деятельности внутренней (психической) и внешней (материализованной внутренней) реализован в описании компонентов деятельности.

Понимание и принятие автором положения о том, что принцип предметности составляет ядро психологической теории деятельности, в данной работе представлено результатами исследования категориального аппарата по понятию как форме мышления и теореме как виде суждения. Эти результаты использованы в разработке таких видов деятельности учащихся при обучении математике, как «введение понятия» и «изучение утверждения». В монографии показано, что в теории и методике, технологиях обучения математике вопросы обучения понятиям и суждениям до сих пор представлены традиционно, без глубокого анализа их с позиций деятельности.

Применяя деятельностный подход к процессу обучения математике в школе, нами выделены виды деятельности, которые следует формировать у учащихся средней школы. О том, что знания формируются в деятельности и иначе как в деятельности полноценно усвоены быть не могут, говорят в своих трудах психологи Н.Ф. Талызина, В.В. Давыдов, Л.М. Фридман, дидакты Г.И. Щукина, П.И. Пидкасистый и их последователи. Автором предприняты значительные усилия по претворению основных положений деятельностного подхода, обозначенного в трудах Н.Ф. Талызиной и П.И. Пидкасистого, в технологии обучения математике учащихся средней школы.

Исследование каждого из выделенных видов деятельности учащихся при обучении математике с точки зрения общей структуры деятельности позволило нам представить их структурные элементы: мотивацию, целеполагание, действия и операции, из которых складывается каждый вид деятельности. Описание целей, порождаемых мотивом, и соответствующих им действий, операций может быть использовано в практической работе учителя математики и при подготовке будущих учителей математики. Формирование познавательного инструментария учащихся в ходе деятельности есть воспитание соответствующих познавательных привычек, по терминологии Е.А. Дышинского (из неопубликованных работ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абульханова-Славская, К. А.* Деятельность и психология личности / К. А. Абульханова-Славская. – М. : Наука, 1980. – 335 с.
2. *Алгебра* и начала анализа: учеб. для 10—11 кл. сред. шк. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; под редакцией А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1990. — 320 с.
3. *Алгебра:* учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. В.Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 1997. – 240 с.
4. *Алгебра*: учебник для 8 кл. ср. шк. / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под редакцией С. А. Теляковского. — М.: Просвещение, 2004.
5. *Алгебра*: учебник для 9 кл. ср. шк. / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; под редакцией С. А. Теляковского. — М: Просвещение, 1992.
6. *Антипов, И. Н.* Символы, обозначения, понятия школьного курса математики: пособие для учителей / И. Н. Антипов, Л. С. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1978. – 64 с.
7. *Асмолов, А. Г.* Психология личности / А. Г. Асмолов. – М. : Смысл : Академия, 2002. – 112 с.
8. *Балл, Г. А.* Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. – 183 с.
9. *Богоявленский, Д.Н.* Психология усвоения знаний в школе / Д. Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 348 с.
10. *Беспалько, В. П.* Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – М. : Педагогика, 1989. – 190 с.
11. *Болтянский, В. Г.* Как устроена теорема? / В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1973. – № 1. – С.41– 49.
12. *Васильева, Г. Н.* О видах деятельности учащихся на уроках математики / Г. Н. Васильева // Реализация деятельностного подхода при обучении математике в средней школе : сб. ст. / под ред. Г. Н. Васильевой. – Пермь, 2003. – С. 4–13.
13. *Васильева, Г. Н.* О деятельностном подходе при введении понятий // Педагогические идеи Е.А. Дышинского и современное математическое образование : материалы науч.-практ. конференции преподавателей математики вузов и сузов, посвященной 80-летию со дня рождения Е.А. Дышинского / гл. ред. Г. Н. Васильева ; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2005. – С. 130 – 135.
14. *Васильева, Г. Н.* О содержании основного общего математического образования / Г.Н. Васильева // Методики и технологии математического образования: сборник трудов по материалам II международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». Ч. 3. — Тольятти: ТГУ, 2005.—С.17–22.

15. *Васильева, Г.Н.* Реализация деятельностного метода обучения на примере изучения логарифмов в средней школе // Проблемы реализации творческого потенциала личности в процессе обучения математике: межвузовский сборник научно-методических трудов. – Екатеринбург: УрГПУ, 2001.
16. *Васильева, Г.Н.* Об изложении курса алгебры основной школы с позиций деятельностного подхода в обучении // Актуальные проблемы преподавания математики в педагогических вузах и средней школе: тез. докл. XXIII Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и пед. вузов, 13—15 октября 2004 г./ гл. ред. Е.В. Яковлев. — Челябинск. 2004. — С. 197.
17. *Ведерникова, Т.Н.* Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики / Т.Н. Ведерникова, О.А. Иванов // Математика в школе. — 2002. — № 3. — С. 41.
18. *Виленкин, Н. Я.* Алгебра для 8 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М. : Просвещение, 1995. – 256 с.
19. *Виленкин, Н. Я.* Современные основы школьного курса математики / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1980. – 377 с.
20. *Виноградова, Л. В.* Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Л. В. Виноградова. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 252 с.
21. *Виноградова, Н. Ф.* Индивидуализация обучения в начальной и профильной школах: парадоксы взаимодействия / Н. Ф. Виноградова // Профильная школа. – 2003. – №2.
22. *Волович, М. Б.* Ключ к пониманию алгебры. Пособие для учителя, ученика и его родителей / М. Б. Волович. – М. : Аквариум, 1997. – 272 с.
23. *Волович, М. Б.* Наука обучать. Технология преподавания математики / М. Б. Волович. – М. : LINKA – PRESS, 1995. – 280 с.
24. *Володин, В. К.* Несколько задач на движение плоскости / В.К. Володин, С.В. Фролова // Математика в школе. — 2000. — № 4. — С. 8.
25. Вопросы общей методики преподавания математики: учеб. пособие для студентов-заочников III-IV курсов физ.- мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1979. – 80 с.
26. *Выготский, Л. С.* Избранные психологические исследования/ Л. С. Выготский. – М. : АПН РСФСР, 1956. – 520 с.
27. *Выготский, Л. С.* Умственное развитие детей в процессе обучения / Л. С. Выготский. – М. : Учпедгиз, 1935. – 135 с.
28. *Гальперин, П. Я.* О психологических основах программированного обучения / П. Я. Гальперин // Новые исследования в педагогических науках : сб. ст. – М., 1965. – Вып. 4. – С. 21–26.
29. *Ганеев, Х. Ж.* Теоретические основы развивающего обучения математике / Х. Ж. Ганеев. — Екатеринбург, 1997. — 160 с.
30. *Гастева, С. А.* Методика преподавания математики в восьмилетней школе. / С. А. Гастева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин, М. И. Шидловская; под общей ред. С. Е. Ляпина. – М. : Просвещение, 1965. — 743 с.

31.*Давыдов, В. В.* Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования/ В. В. Давыдов — М.: Изд-во «Академия», 1986. – 240 с.
32.*Давыдов, В. В.* Состояние и проблемы исследования учебной деятельности / В. В. Давыдов // Деятельностный подход в психологии: проблемы и перспективы: сб. науч. тр. / под ред. В. В. Давыдова, Д. А. Леонтьева. – М., 1990. – С. 3–18.
33.*Давыдов, В.В.* Содержание и структура учебной деятельности учащихся/ В.В. Давыдов // Формирование учебной деятельности школьников. — М., 1982. — С. 10–21.
34. *Дегтянникова, И.Н.* Построение моделей к задачам с полными и неполными данными / И.Н. Дегтянникова // Математика в школе. — 2001. — № 2. — С. 15.
35.Деятельность: теория, методология, проблемы. – М. : Политиздат, 1990. – 366 с.
36.Дидактика средней школы: некоторые проблемы современ. дидактики / под ред. М. Н. Скаткина. – М. : Просвещение, 1982. – 319 с.
37.*Дорофеев, Г. В.* Математика. 5 класс: в 3-х частях / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М. : Ювента : Просвещение, 1996.
38.*Дорофеев, Г. В.* Математика. 6 класс: в 3-х частях / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М. : Баласс : С-инфо, 1998–1999–2002.
39.*Дусавицкий, А.К.* Развитие личности в учебной деятельности / А. К. Дусавицкий. — М.: Дом педагогики, 1996. — 208 с.
40.*Епишева О.Б.* Общая методика обучения математике в средней школе: курс лекций: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / О.Б. Епишева – изд. 2-е, доп. и перераб. – Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2008.– 203 с.
41.*Епишева, О. Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя / О. Б. Епишева. – М. : Просвещение, 2003. – 223 с.
42.*Епишева, О. Б.* Учить школьников учиться математике: формирование приемов учеб. деятельности: кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990. – 128 с.
43.*Загвязинский, В. И.* Теория обучения: современная интерпретация: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений / В. И. Загвязинский. – М.: Академия, 2001. – 192 с.
44.*Зильберберг, Н. И.* Приобщение к математическому творчеству. / Н. И. Зильберберг. – Уфа : Башкирское книжное издательство, 1988. – 96 с.
45.*Зимняя, И. А.* Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования / И. А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2003. – № 5. – С. 34–42.
46.Знакомимся с алгеброй: учеб. пособие по математике для 7 кл. / Э. Г. Гельфман, С. Я. Гриншпон, Л. Н. Демидова и др.; Том. ун-т. – Томск, 1994. – 248 с.
47.*Иванова, Т. А.* Гуманитаризация общего математического образования: моногр. / Т. А. Иванова ; Н. Новгород. гос. пед. ун-т. – Н. Новгород, 1998. – 206 с.

48. *Кабанова-Меллер, Е. Н.* Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Меллер. – М. : Знание, 1981. – 96 с.
49. *Каменская, Е. И.* Основы психологии: конспект лекций / Е. И. Каменская. – Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 192 с.
50. *Канин, Е.С.* Заключительный этап решения учебных задач / Е.С. Канин, Ф.Ф. Нагибин. // Преподавание алгебры и геометрии в школе. — М.,1982. — 223 с .
51. *Клековкин, Г. А.* Некоторые аспекты использования компьютера в свете деятельностного подхода к обучению / Г. А. Клековкин // Методики и технологии математического образования: сб. тр. по материалам II Междунар. науч. конф. "Математика. Образование. Культура", г. Тольятти 1–3 нояб. 2005 г. – Тольятти : ТГУ, 2005.
52. *Колягин, Ю.М.* Задачи в обучении математике: в 2-х частях /Ю. М. Колягин. — М. : Просвещение. — 1977.
53. Концепция структуры и содержания общего среднего образования (в 12-летней школе): проект // Математика в школе.— 2000. № 2. — С. 6 .
54. Концепция математического образования (в 12-летней школе): проект // Математика в школе.— 2000. № 2. — С. 13.
55. *Крутецкий, В. А.* Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. — 432 с.
56. *Крупич, В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В.И. Крупич. — М., 1995. — 166 с.
57. *Купавцев, А. В*. Деятельностная альтернатива в образовании / А. В. Купавцев // Педагогика. – 2005. – № 10. – С. 27–33.
58. *Лазарев, В. С.* Критерии и уровни готовности будущего педагога к исследовательской деятельности / В. С. Лазарев, Н. И. Ставринова // Педагогика. – 2006. – № 2. – С. 51–59.
59. *Лебедева, И. П.* Теория взаимодействия систем «ученик» и «объект изучения» / И. П. Лебедева ; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2001. – 200 с.
60. *Лебедева, И. П.* Математическое моделирование в педагогическом исследовании: моногр. / И. П. Лебедева ; Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2003. – 122 с.
61. *Левитас, Г.Г.* Об алгебраическом решении текстовых задач // Математика в школе. — 2000. — № 8. — С. 13.
62. *Леонтьев, А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. – М. : Политиздат, 1975. – 304 с.
63. *Леонтьев, А. Н.* Проблемы развития психики/ А. Н. Леонтьев.— М., 1981. — 584 с.
64. *Леонтьев, А. Н.* Избранные психологические произведения: в 2 т. Т.2 / А. Н. Леонтьев. – М.: Педагогика, 1983. – 320 с.
65. *Лернер, И. Я.* Процесс обучения и его закономерности / И. Я. Лернер. – М. : Знание, 1980. – 96 с.
66. *Лихачев, Б.Т.* Воспитательные аспекты обучения: учеб. пособие по спецкурсу для студентов пед. ин-тов. —М.: Просвещение, 1982. — 192 с.
67. *Лященко, Е. И.* Методика обучения математике в 4-5–х классах / Е.И.Лященко, А.А. Мазаник — Минск: Нар. асвета, 1976. — 222 с.

68. *Лященко, Е. И.* Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.
69. *Маркова, А.К.* Формирование учебной деятельности и развитие личности школьника/ А.К. Маркова// Формирование учебной деятельности школьников. — М.: Педагогика, 1982. — С. 21.
70. *Маркова, А. К.* Формирование мотивации учения: кн. для учителя/ А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – М. : Просвещение, 1990. – 230 с.
71. Математика : учеб. для 5 кл. ср. шк. / Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд, В. И. Жохов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 1995. – 384 с.
72. *Матушкина, З.П.* Приемы обучения учащихся решению математических задач: учебное пособие. — Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2003. – 256 с.
73. *Махмутов, М. И.* Проблемное обучение. Основные вопросы теории / М. И. Махмутов. – М. : Педагогика, 1975. – 368 с.
74. *Мельникова, Е. Л.* Проблемный урок или как открывать знания с учениками: пособие для учителя./ Е.Л. Мельникова. — М. — 2002. — 168 с.
75. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, В.Я. Саннинский, Г.А. Луканкин. – М.: Просвещение, 1975. – 447 с.
76. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.
77. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
78. *Миганова, Е.Ю.* Обучение методам решения задач по теме «Треугольники» // Математика в школе. — 2002. — № 3. — С. 25.
79. *Мордкович, А. Г.* Алгебра. 7 кл.: в двух частях. Ч. 1 : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – 4-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2001. – 160 с.
80. *Мордкович, А. Г.* Алгебра 8 кл.: в двух частях. Ч. 1: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. — 4-е изд. – М. : Мнемозина, 2002.— 223 с.
81. *Мордкович, А. Г.* Алгебра 9 кл.: в двух частях. Ч. 1: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. — 4-е изд. – М. : Мнемозина, 2004.— 192 с.
82. *Мордкович, А. Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2000.— 336 с.
83. *Нешков, К. И.* Функции задач в обучении // Математика в школе. — 1971. — №3. — С. 4.

84. *Никитин, В. В.* Определения математических понятий: пособие для учителей / В. В. Никитин, К. А. Рупасов. – М. : Учпедгиз, 1963. – 206 с.
85. *Никифоров, А. Л.* Деятельность, поведение, творчество / А. Л. Никифоров // Деятельность: теории, методология, проблемы. – М., 1990. – С. 52–69.
86. *Никольская, И. Л.* Учимся рассуждать и доказывать: кн. для учащихся 6–10 кл. сред. шк. / И. Л. Никольская, Е. Е. Семенов. – М. : Просвещение, 1989. – 192 с.
87. Новейший философский словарь / сост. А. А. Грицанов. – Минск, 1999. – 878 с.
88. Образовательный стандарт основной школы : материалы семинара, п. Салтыковка Моск. обл., 3–5 апреля 2002 г. – М., 2002.
89. *Огурцов, А. П.* Деятельность / А. П. Огурцов, Э. Г. Юдин // БСЭ : в 30 т. Т. 8. – 3-е изд. – М., 1972. – С. 180–181.
90. *Ожегов, С.И.* Словарь русского языка: 70 000 слов/ под ред. Н.Ю. Шведовой. —23-е изд., испр. — М. : Рус. яз., 1990. — 917 с.
91. *Пайсон, Б. Д.* О логической составляющей образовательной области "математика" / Б. Д. Пайсон // Математика в школе. – 2003. – № 2. – С. 10.
92. Педагогика: педагогические теории, системы, технологии : учебн. для студентов высш. и сред. пед. учеб. заведений / С. А. Смирнов, И. Б. Котова, Е. Н. Шиянов. – М. : Академия, 2004. – 509 с.
93. Педагогическая энциклопедия: в 4 т. Т. 4. – М., 1968. – С. 410–414.
94. *Перельман, Я. И.* Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. – М. : Триада – литера, 1994. – 200 с.
95. *Перминова, Л. М.* Логико-дидактический подход к обучению / Л. М. Перминова // Педагогика. – 2004. – № 1. – С. 18–26.
96. *Пехлецкий, И.Д.* Компоненты индивидуального стиля преподавания: спецкурс–практикум. — Пермь : ПГПИ, 1990. — 138 с.
97. *Пидкасистый, П. И.* Искусство преподавания: первая кн. учителя / П. И. Пидкасистый, М. Л. Портнов. – М., 1999. – 212 с.
98. *Пидкасистый, П. И.* Самостоятельная познавательная деятельность школьников : теорет.-эксперим. исслед. / П. И. Пидкасистый. – М. : Педагогика, 1980. – 240 с.
99. *Пичурин, Л. Ф.* За страницами учебника алгебры : кн. для учащихся 7–9 кл. сред. шк. / Л. Ф. Пичурин. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.
100. Планы и методические рекомендации к практическим и лабораторным занятиям по методике преподавания математи ки / сост. И.С. Цай, Л.Г. Ярославцева; отв. ред. Г.Н. Васильева. — Пермь: ПГПИ, 1992. — 54 с.
101. *Погорелов, А.В.* Геометрия: учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений. — 5-е изд.— М.: Просвещение, 2004. — 224 с.
102. *Пойа, Д.* Как решать задачу. — М. : Квантор,. — 1991. — 216 с..
103. *Половникова, Н. А.* О теоретических основах воспитания познавательной самостоятельности школьника в обучении / Н. А. Половникова // Ученые записки МП РСФСР / Казан. гос. пед. ин-т. – Вып. 47. – Казань, 1968. – 204 с.
104. Программа обучения математике в гимназии/ сост. Г.Н. Васильева, И.Д.

Пехлецкий.— Пермь: ГКОН. — 1996. — 45 с.
105. *Равен, Дж.* Компетентность в современном обществе: выявление, развитие и реализация: пер. с англ. / Дж. Равен. – М. : Когито-центр. — 2002. – 394 с.
106. Развитие познавательной самостоятельности учащихся в процессе решения геометрических задач: (в обучении геометрии в шестом классе) : автореф. дис. … канд. пед. наук / Г. Н. Васильева. – М., 1982. – 16 с.
107. Региональный стандарт для общеобразовательных учреждений Пермской области: "Математика" /Департамент образования и науки администрации Перм. области ; ПГПУ. – Пермь, 2001.
108. *Репкин, В. В.* Развивающее обучение: теория и практика / В.В. Репкин, Н. В. Репкина. – Томск : Пеленг, 1997. – 288 с.
109. *Репкин, В. В.* Развивающее обучение и учебная деятельность / В.В. Репкин. — Рига, 1992. — 44 с.
110. *Репьев, В.В.* Методика преподавания алгебры в 8-летней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов. — М.: Просвещение, 1967.— 223 с.
111. *Рогов, А. Т.* Важнейшее требование теории учебника / А. Т. Рогов // Проблемы школьного учебника : сб. ст. – М., 1974. – С. 101–113.
112. *Рубинштейн, С. Л.* Основы общей психологии / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер Ком, 1998. – 705 с.
113. *Саранцев, Г. И.* Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 223 с.
114. *Саранцев, Г. И.* Обучение математическим доказательствам в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2000. – 171 с.
115. *Саранцев, Г. И.* Формирование математических понятий в средней школе / Г. И. Саранцев // Математика в школе. – 2003. – № 10. – С. 6–10.
116. *Селевко, Г. К.* Современные образовательные технологии : учеб. пособие / Г. К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.
117. *Селиверстова, Е. Н.* Развивающая функция обучения: современный дидактический взгляд / Е. Н. Селиверстова // Педагогика. – 2006.– № 4. – С. 45–52.
118. *Семиряжко, В. А.* Философский и методический аспекты разработки современных учебников по математике / В. А. Семиряжко // Математика в школе. – 2006. – №9.– С. 50–54.
119. *Сериков, В. В.* Личностно-ориентированное образование / В. В. Сериков // Педагогика. – 1994. – № 5. – С. 17–18.
120. *Сериков, В. В.* Личностный подход в образовании: концепция и технологии : моногр. / В. В. Сериков. – Волгоград : Перемена, 1994. – 150 с.
121. *Слепкань, З.И.* Психолого-педагогические основы обучения математике / З. И. Слепкань. – Киев: Рад. Школа, 1983. – 192 с.
122. *Смирнов, С. Д.* Педагогика и психология высшего образования. От деятельности к личности : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / С. Д. Смирнов. – М. : Академия, 2005. – 393 с.

123. Современные аспекты методики обучения математике : учеб. пособие / Т.Л. Блинова , Э.А. Власова, И.Н. Семенова, А.В. Слепухин; под. ред. И.Н. Семеновой, А.В. Слепухина ; ГОУ ВПО «Урал. гос. пед. ун-т». — Екатеринбург. 2007. —190 с.
124. Степень и ее свойства: методическая разработка. / Перм. гос. пед. ун-т; авторы-сост. Г.Н. Васильева, И.Н. Власова — Пермь, 2001. – 20 с.
125. *Столяр, А. А.* Логическое введение в математику / А. А. Столяр. – Минск : Вышэйш. шк., 1971. – 222 с.
126. *Столяр, А. А.* Педагогика математики : курс лекций / А. А. Столяр. – 2-е изд., перераб. и допол. – Минск : Вышэйш. шк., 1986. – 414 с.
127. *Талызина, Н.Ф.* Что значит знать? / Н. Ф. Талызина // Советская педагогика. – 1980. – № 8. — С. 97.
128. *Талызина, Н. Ф.* Педагогическая психология : учеб. для студентов учеб. заведений сред. проф. образования / Н. Ф. Талызина. – М. : Академия, 2003. – 288 с.
129. *Тарасенкова Н.А.* Пропедевтический этап обучения поиску дополнительных построений./ Н.А. Тарасенкова // Математика в школе. — 2000. — № 4. — С. 32.
130. Теоретические основы обучения математике в средней школе: учебное пособие / Т. А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова ; под ред. Проф. Т.А Ивановой. — Н. Новгород: НГПУ, 2003. – 320 с.
131. Технологии и методики обучения: методические рекомендации. Часть 1 / сост. Г.Н. Васильева, И.В. Косолапова. — Пермь, 2002. — 43 с.
132. *Тимофеева Н.М.* Словник к методическому словарю по обучению математике / под ред. Г.Е Сенькиной – Смоленск: СГПУ, 2003. – 40 с.
133. *Третьяков П.И.* Технология модульного обучения в школе: практико-ориентированная монография / под ред. П.И. Третьякова. – М.: Новая школа, 1997. — 352 с.
134. *Усова, А. В.* Психолого-дидакические основы формирования у учащихся научных понятий: пособие по спецкурсу / А. В. Усова ; Челябинский пед. ин-т. – Челябинск, 1988. – 89 с.
135. *Фридман, Л.М.* Теоретические основы методики обучения математике/ Л.М. Фридман. — М. : Издательство «Флинта», 1998. — 224 с.
136. *Фридман, Л. М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л. М. Фридман. – М. : Просвещение, 1977. – 208 с.
137. *Фридман, Л. М.* Как научиться решать задачи: беседы о решении мат. задач. Пособие для учащихся/ Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий, В.Я. Стеценко; под ред. Л.М. Фридмана. — М. : Просвещение, 1979. — 160 с.
138. *Фридман, Л.М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в средней школе/ Л.М. Фридман. — М. : Просвещение, 1983.
139. *Хуторской, А. В.* Деятельность как содержание образования / А. В. Хуторской // Народное образование. – 2003. – № 8. – С. 107–114.
140. *Хуторской, А. В*. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования / А. В. Хуторской // Нар. образование. – 2003. – № 2. – С. 58–64.

141. *Хуторской, А. В.* Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения / А. В. Хуторской. – М. : МГУ, 2003. – 416 с.
142. *Хуторской, А. В.* Практикум по дидактике и современным методикам обучения : учеб. пособие / А. В. Хуторской. – 3-е изд., дораб. – СПб. : Питер, 2004. – 541с.
143. *Хуторской, А. В.* Место учебника в дидактической системе / А. В. Хуторской // Педагогика. – 2005. – № 4. – С. 10–18.
144. *Швырев, В. С.* Проблемы разработки понятия деятельности как философской категории / В. С. Швырев // Деятельность: теории, методология, проблемы. – М., 1990. – С. 9–20.
145. *Шимина, А. Н.* Логико-гносеологические основы процесса формирования понятий в обучении : пособие к спецкурсу для студентов пед. ин-тов / А. Н. Шимина. – М., 1981. – 75 с.
146. "Школа 2000…". Математика. 5–6 классы : метод. материалы к учеб. математики Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон / сост. Л. Г. Петерсон. – М. : УМЦ "Школа 2000…", 2003. – 240 с.
147. *Щукина, Г. И.* Активизация познавательной деятельности в учебном процессе : учеб. пособие для пед. ин-тов / Г. И. Щукина. – М. : Просвещение, 1979. – 160 с.
148. *Щукина, Г. И.* Роль деятельности в учебном процессе : кн. для учителя / Г. И. Щукина. – М. : Просвещение, 1986. – 142 с.
149. *Эльконин, Д. Б.* Психология обучения младшего школьника / Д.Б. Эльконин. – М. : Знание. — 1974.— 64 с.
150. *Эльконин, Д. Б.* Избранные психологические труды / Д. Б. Эльконин ; под ред. В.В. Давыдова, В. П. Зинченко – М. : Педагогика, 1989. – 554 с.
151. *Якиманская, И. С.* Личностно ориентированное обучение в современной школе. — М. : Сентябрь. — 1996. — 96 с.
152. *Ястребов, А. В.* Задачи по общей методике преподавания математики: учебное пособие / А. В. Ястребов. — Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. — 148 с.

Научное издание

Васильева Галина Николаевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Монография

Редактор *Е.В. Абрамова*
Компьютерная верстка выполнена *И.Л. Камашевой*

ИБ № 326

Свидетельство о государственной аккредитации вуза
№ 1806 от 11.03.09 г.
Изд. лиц. ИД № 03857 от 30.01.2001.
Подписано в печать 09.09.09. Формат 60x90 1/16.
Бумага ВХИ. Печать на ризографе. Набор компьютерный.
Усл. печ. л. 8,3. Уч.-изд. л. 7,1
Тираж 150 экз. Заказ №____

Редакционно-издательский отдел
Пермского государственного педагогического университета
614990, г. Пермь, ул. Сибирская, 24, корп.2, оф.71
тел. (342) 238-63-12

Отпечатано на ризографе в ИПК «ОТ и ДО»
Пермского образовательного научного исследовательского
Центра авитальной активности (ПОНИЦАА)
614094, г. Пермь, ул. Овчинникова, 19;
Тел. (342) 224-47-47