МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОСИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный педагогический университет»

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Курс лекций

для организации самостоятельной работы студентов

по вопросам частных методик

ПЕРМЬ

ПГПУ

2011

Оглавление

Введение

Усиление роли самостоятельной работы в подготовке студентов в связи с современными требованиями вузовского обучения, сокращение количества часов на аудиторные занятия, необходимость организации руководства самостоятельной работой студентов — все это потребовало решения комплекса проблем методической подготовки будущих учителей математики.

Содержание данного пособия составили лекции и материалы для организации самостоятельной работы, используемые много лет в изучении курса методики преподавания математики средней школы в ПГПУ. Лекции, включенные в данное пособие, целесообразно использовать как в ходе аудиторной работы, так и для индивидуального изучения, при подготовке к занятиям.

Задания для самостоятельной работы, помещенные в лекциях, требуют от студента обращения к школьным учебникам, что предполагает систематическое изучение их содержания. Поэтому выполнение этих заданий *каждым* студентом обязательно. Результаты работы обсуждаются на семинарах.

Лекция «Тождественные преобразования выражений», разработанная доцентом кафедры *И.С. Цай*, содержит основной понятийный аппарат темы, теоретические основы изучения преобразований всех видов выражений, в том числе и трансцендентных. В этом состоит фундаментальность данной лекции — ее содержание ориентирует на методику изучения соответствующей темы в старшей (средней) школе.

Лекция «Содержательная линия “Уравнения и неравенства” в школьном курсе математики» подготовлена кандидатом педагогических наук, доцентом *Г.Н. Васильевой*. В лекции раскрывается историческая роль понятия уравнения в математике, значимость понятия равносильных преобразований уравнений, неравенств и их систем, в том числе с точки зрения деятельностного подхода к обучению.

Лекция «Обобщение понятия степени» разработана доцентом *Л.Г. Ярославцевой*. Содержание лекции является связующим для линий тождественных преобразований выражений и функциональной. Приводится характеристика этапов по обобщению понятия степени, изучаемых в основной школе, и представлена подготовка к изучению показательной функции на множестве действительных чисел. Также предлагается схема рассуждений, относящаяся к методике уроков систематизации и обобщения знаний.

Методика изучения геометрии в основной школе включает вопросы логического строения, возможных подходов к построению школьного курса планиметрии, основные ступени изучения геометрии в школе. Лекция подготовлена доцентом *В.П. Красношековой* и содержит методические этюды к изучению отдельных вопросов.

Пособие завершается приложением, цель которого — в углублении теоретической подготовки студентов. В приложении приведены статьи *А.Д. Александрова* «О геометрии» и авторов *Н.Я. Виленкина* и *С.И. Шварцбурда* «Равенства, тождества, уравнения, неравенства», которые следует, на наш взгляд, изучить студенту, осваивающему курс методики преподавания математики.

ЛЕКЦИЯ 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

План

Введение
1. Основной понятийный материал.
2. Теоретические основы тождественных преобразований выражений.
3. Место, содержание и значение темы в школьном курсе математики.
4. Изучение тождественных преобразований выражений в пропедевтическом курсе математики.
5. Некоторые методические особенности изучения тождественных преобразований в систематическом курсе алгебры.

Введение

В любой области знаний, использующей математику, появляется необходимость заменять одно выражение другим, более простым или более удобным для решения рассматриваемой задачи. Иначе говоря, приходится выполнять **тождественные преобразования.** Рассмотрим приведенные ниже упражнения.

1. Упростите выражение: $x^2 + a^3 - 3a^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}3a^3$.
2. Решите уравнения: $4x + 2x + x = 14$;
$(4x+5)^2 - (5x^2 - 4x) = 0$;
$1 + \cos x + \cos 2x = 0$;
$\frac{1}{2}\lg(2x-1) = 1 - \lg\sqrt{x-9}$.
3. Докажите неравенство: $(c+2)\cdot(c+6) < (c+3)\cdot(c+5)$.
4. Найдите значение выражения $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$ при $a = 2{,}45$.
5. Докажите, что выражение $\dfrac{(2k+1)^4 - 1}{4k^2 + 4k + 2}$, где $k \in N$, кратно 8.
6. Исследуйте функцию $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + 9$.

Различные по содержанию упражнения выполняются при изучении *различных тем* в *разных классах* – все они требуют предварительного выполнения **тождественных преобразований содержащихся в них выражений.**

1. Основной понятийный материал

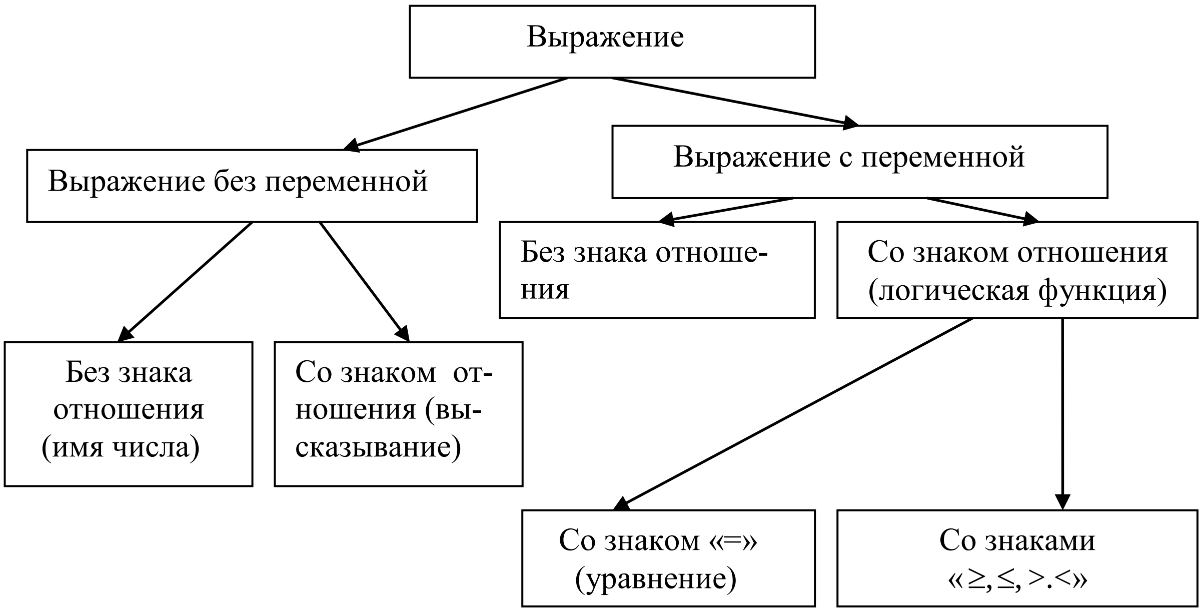


Рис. 1 Виды выражений

Предметом нашего изучения являются выражения с переменной без знака отношения. Рассмотрим примеры элементарных выражений.

Таблица 1

Константа ($a, b, c, \dots, 3-4, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \dots$)	$\sqrt[m]{x}$ или $x^{\frac{1}{m}}$, где $x \geq 0$ $m \in N, m > 1$	$\operatorname{tg} x$
Переменная ($x, y, z, \dots$)	$\lvert x \rvert, x \in R$	$\operatorname{ctg} x$
$x+y$ $x-y$ $x \cdot y$	$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\arcsin x$
$\frac{x}{y}$	$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$\arccos x$
$x^m,\ m \in N$	$\sin x$	$\operatorname{arctg} x$
$x^m, m \in Z (m \leq 0), x \neq 0$	$\cos x$	$\operatorname{arcctg} x$

Какие из них являются целыми, дробными, рациональными, иррациональными, алгебраическими, неалгебраическими? Примеры неэлементарных выражений: $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$; $\frac{1}{2}\lg(2x-1) + 1 - \lg\sqrt{x-9}$; $\frac{(2k+1)^4 - 1}{4k^2 + 4k + 2}$; $\arcsin x + \arccos x$ и др.

Можно рассмотреть следующую классификацию выражений:

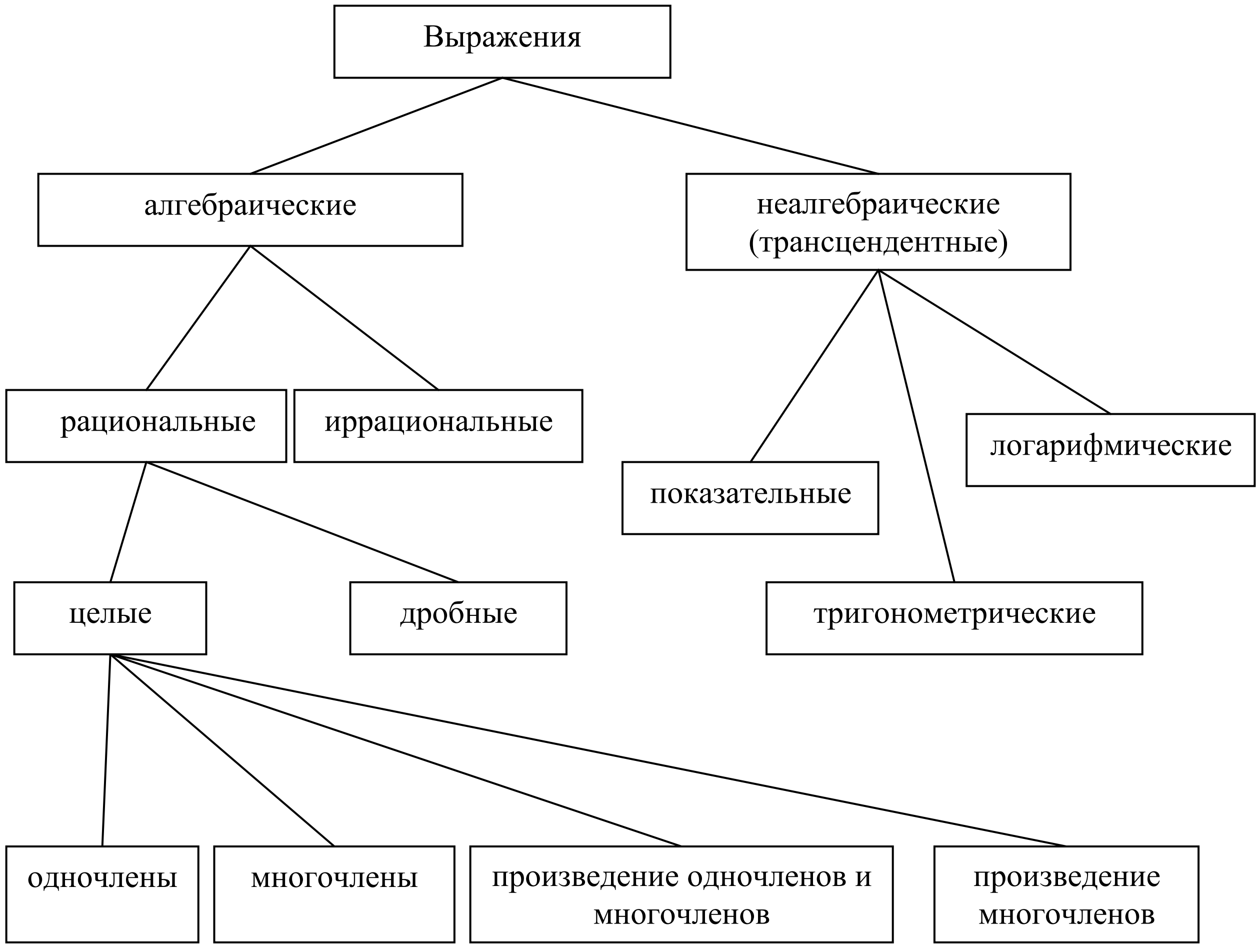


Рис. 2

Нам предстоит обучать выполнению тождественных преобразований выражений.

Задание

Сформулируйте определения или описания следующих понятий: выражение; преобразование выражений; тождественное преобразование выражений; тождественно равные выражения; тождество; одночлен; многочлен.

2. Теоретические основы тождественных преобразований выражений

2.1. Существуют две точки зрения на тождественные преобразования рациональных выражений. Это *алгебраическая*, заключающаяся в том, что изучаются *действия над выражениями.* Для школы (в частности для седьмого и восьмого классов, где изучаются тождественные преобразования целых и дробно-рациональных выражений) это не представляется возможным, так как для четкого обоснования действий над рациональными выражениями необходимо знание таких понятий, как кольцо многочленов и поле рациональных дробей. Вторая точка зрения – *теоретико-функциональная*, рассматривающая многочлен как целую рациональную функцию (одного или нескольких переменных), а алгебраическую дробь как дробно-рациональную функцию. Подробнее об этом – в статье И.В. Баума и Ю.Н. Макарычева [1].

Для школьной алгебры представляет интерес и тот и другой подход. Нельзя недооценивать или отказываться ни от одного из них: в одних случаях приходится сосредоточивать внимание учащихся на алгебраической стороне вопроса, в других – интерес представляет функциональная сторона. Поэтому полезно объединение этих двух позиций. Например, при изучении тождественных преобразований целых выражений полезно:

- рассматривать на множестве одночленов лишь одну операцию – умножение;
- не рассматривать специально деление многочленов, отнеся его в раздел «рациональные дроби»;
- считать тождественно равными два целых рациональных выражения, значения которых совпадают при одинаковых значениях входящих в них переменных;
- тождественные преобразования строить на основе законов арифметических действий (аксиом полугруппы и кольца), считать их аксиомами тождественных преобразований.

Следует отметить, что действия над алгебраическими выражениями в том смысле, который принят в арифметике, выполнить нельзя. Выполнить обозначенные действия возможно только при каждом конкретном наборе числовых значений входящих в эти выражения букв.

Действия можно лишь обозначить: сложение обозначается знаком «+», вычитание – знаком «– », умножение – «·», деление – чертой дроби, например, $\frac{4\grave{a}^2b^3}{7\grave{a}^3b^2\tilde{n}}$, а не $4a^2b^3 : 7a^3b^2c$. (Объясните, почему?)

2.2. К определению алгебраических выражений целесообразно подходить с позиции математического анализа (см. рис.1), считая многочлен целой, а алгебраическую дробь – дробно-рациональной функцией. Это значит, что алгебраические выражения *определяются* в зависимости от операций, обозначенных над переменными и постоянными.

Определение 1. *Рациональным* называется такое алгебраическое выражение, которое составлено из постоянных, переменных, знаков арифметических действий и скобок.

Определение 2. Рациональное алгебраическое выражение называется *целым*, если в нем не обозначено деление на переменную.

Определение 3. Рациональное алгебраическое выражение называется *дробным*, если в нем обозначено деление на выражение, содержащее переменную.

2.3. Изучение тождественных преобразований требует хорошего владения понятием равенства. *Равенством* называют предложение, состоящее из двух выражений, соединенных знаком «= ».

Для изучения тождественных преобразований интерес представляют *верные равенства*, обладающие следующими свойствами (аксиомы равенства):

1. A = A – аксиома рефлексивности.
2. Если A = B, то B = A – аксиома симметричности.

3. Если А = В и В = С, то А = С – аксиома транзитивности. Это свойство имеет существенное значение в тождественных преобразованиях.

2.4. Законы арифметических действий следует считать аксиомами тождественных преобразований.

Выводы

Основными положениями, на которых строится теория тождественных преобразований, являются следующие.

1. Действия над целыми алгебраическими выражениями только обозначаются.
2. Пусть a, b, c – любой одночлен или многочлен, тогда:

- сложение целых рациональных выражений коммутативно, т.е. $a+b=b+a$,
- сложение ассоциативно, т. е. $(a+b)+c=a+(b+c)$,
- умножение коммутативно, т.е. $a\cdot b=b\cdot a$,
- умножение ассоциативно, т.е. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,
- умножение дистрибутивно относительно сложения,
  т.е. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ и $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$.

Кроме этих аксиом выполняются аксиомы о действиях с нулем и единицей, а также свойства равенств:

- $a+0=0+a=a$,
- $a\cdot 0=0\cdot a=0$,
- $a\cdot 1=1\cdot a=a$,
- $a=a$,
- если $a=b$, то $b=a$,
- если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

Все остальные преобразования должны быть обоснованы ссылкой на эти аксиомы, введенные определения или уже доказанные теоремы.

Пример. Доказать справедливость равенства $a-b=a+(-b)$.

Доказательство. Рассмотрим разность a и b. По определению действия вычитания:

$$a=[a+(-b)]+b=$$

(используем свойство – ассоциативность сложения)

$$=a+[(-b)+b]=$$

(определение суммы противоположных выражений)

$$=a+0=$$

(аксиома нуля)

$$=a.$$

3. Место, содержание и значение темы в школьном курсе математики

3.1. Линия тождественных преобразований является одной из четырех основных содержательных линий школьного курса алгебры (учение о числе, функции, уравнения и неравенства, тождественные преобразования). Она является постоянной частью программы и проходит через весь курс школьной математики (входит, по выражению А.Н. Колмогорова, в « ядро» программы).

Основы тождественных преобразований закладываются еще в начальной школе (законы арифметических действий), но это изучение носит предварительный (пропедевтический) характер. Систематически и углубленно эти вопросы изучаются в курсе алгебры, начиная с седьмого класса.

Приведем последовательность изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе алгебры.

Класс	Виды выражений
7	Целые выражения (одночлены и многочлены)
8	Дробные рациональные выражения. Арифметические квадратные корни
9 (10)	Степень с рациональным показателем
9 (10)	Корни n–й степени
10	Тригонометрические выражения
11	Логарифмические выражения

При изучении тождественных преобразований любого вида выражений необходимо рассмотреть следующие вопросы:

- теоретические основы преобразований;
- определение (или описание);
- виды преобразований.

3. 2. Значение темы

3.2.1. Общеобразовательное и развивающее

1. Учащиеся знакомятся:

- с *новыми понятиями* (тождество, тождественные преобразования, тождественно равные выражения, одночлен, многочлен, рациональная дробь и др.),
- с *тождествами*: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2; \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2);$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \text{ где } a>0;$$
$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ и др.},$$

- с *задачами нового содержания*: «Прочитать выражение», «Доказать тождество», «Упростить выражение», «Заменить выражение тождественно равным» и др.

Это дает возможность расширить и углубить пользование алгебраической терминологией и символикой.

2. Изучение тождественных преобразований дает возможность постоянно повторять действия с рациональными (в дальнейшем – и с иррациональными) числами, что способствует отработке вычислительных навыков, в том числе и техники устных вычислений.

3. Учащиеся овладевают техникой выполнения тождественных преобразований, т.е. учатся свободно выполнять и обосновывать преобразования.
4. Задания содержат несложные доказательства, что способствует развитию дедуктивного мышления.
5. Изучение тождественных преобразований предоставляет большие возможности для формирования таких качеств математического мышления, как самостоятельность, гибкость, глубина, критичность, рациональность и т. п.
6. Культура выполнения тождественных преобразований характеризуется следующими признаками:

а) прочное знание свойств операций над числами, выражениями;

б) умение правильно обосновывать преобразование;

в) умение следить за изменением области определения в цепочке преобразований;

г) быстрота и безошибочность тождественных преобразований.

Приведем примеры преобразований, выполненных учениками, и будем рассматривать их в качестве методических задач.

Пример 1. Вычислить $((-2)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Четыре ученика дали различные решения этой задачи.

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = (-2)^1 = -2,$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2,$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2,$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = -2.$$

Кто решил правильно? В чем причина ошибок остальных?

Пример 2. Найти значение выражения $\sqrt{(a-5)^2}$ при $a = 2$.

Ученики дали решения:

1) $\sqrt{(a-5)^2} = a-5 = 2-5 = -3$,

2) $\sqrt{(a-5)^2} = \sqrt{(2-5)^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Кто решил правильно? В чем причина ошибки другого? Как он должен был записать решение?

Пример 3. Решить уравнение $\lg x^2 = 2$.

Ученик решил его так. $2\lg x = 2$; $\lg x = 1$; $x = 10$. Решите уравнение правильно. Объясните причину ошибки ученика.

3. 2.2. Воспитательное значение

1. Специфика раздела «Тождественные преобразования выражений» заключается в том , что он открывает широкие возможности для выработки у учащихся важных трудовых умений, способствует развитию воли, сообразительности, творческой инициативы, самоконтроля и т.п. В частности, при выполнении

заданий комбинированного характера ученик должен вспомнить все известные правила выполнения тождественных преобразований, суметь, следуя этим правилам, шаг за шагом сделать все выкладки, не допустить никаких ошибок, так как малейшая ошибка, например, неверно поставленный знак, делает бессмысленными все усилия. Такая работа способствует воспитанию настойчивости, аккуратности, внимания, осмыслению материала с новых позиций.

2. Целесообразно подобранные упражнения, например при введении в тему, способствуют развитию интереса к математике, мотивации изучения материала.

Примеры.

1) Учитель предлагает числовой фокус:

«Задумайте число, умножьте на задуманное, к результату прибавьте 1, к полученному результату прибавьте удвоенное задуманное число. Скажите, какое число у вас получилось, а я угадаю, какое число вы задумали».

2) Приемы устного счета.

а) учитель моментально находит квадраты чисел, оканчивающихся на цифру 5: (75^2, 45^2, 55^2 и т. д.), произведение двузначных чисел, число десятков которых одинаково, а сумма единиц равна 10 ($53 \cdot 57$, $46 \cdot 44$, $61 \cdot 69$, $83 \cdot 87$ и т. д.);

б) учитель просит учеников назвать любое двузначное число, сам записывает другой множитель и сразу указывает результат. Например, дети называют число 27, учитель – число 23 и дает ответ – 621. Дети удивлены – в чем секрет? Учитель говорит, что секрет они раскроют сегодня после изучения нового материала.

3.2.3. Практическое значение

1. Изучение тождественных преобразований служит аналитическим аппаратом при:

– доказательстве теорем и выводе формул,
– решении уравнений, неравенств и их систем,
– упрощении выражений,
– нахождении значений выражений,
– исследовании функций и др.

2. Тождественные преобразования (особенно в комплексе с решением уравнений, неравенств, систем) находят широкое применение в смежных дисциплинах (физика, химия) при работе с формулами, решении содержательных задач, подготавливают учащихся к восприятию таких важнейших понятий, как алгоритм, программа и др. Здесь имеют место межпредметные связи.

3. Внутрипредметные связи реализуются, например, при нахождении приближенных значений кубов чисел, где используются формулы:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

В частности, $(1+b)^3 = 1^3 + 3b + 3b^2 + b^3 \approx 1 + 3b$;

$(1-b)^3 = 1^3 - 3b + 3b^2 - b^3 \approx 1 - 3b$ используются так:

$$1{,}01^3 = (1+0{,}01)^3 \approx 1+3\cdot 0{,}01 = 1+0{,}03 = 1{,}03;$$
$$0{,}98^3 = (1-0{,}02)^3 \approx 1-3\cdot 0{,}02 = 1-0{,}06 = 0{,}94.$$

4. Изучение тождественных преобразований выражений в пропедевтическом курсе математики

Подробное изложение этого вопроса вы найдете в пособии Е.И. Лященко «Методика обучения математике в 4-5 классах» [10].

Основы тождественных преобразований выражений закладываются в начальной школе: это алгоритмы арифметических действий, свойства операций, свойства нуля и единицы. Знакомство учащихся начальной школы со свойствами арифметических действий позволяет формировать у них вычислительные навыки на основе сознательного использования приемов вычислений и знакомить с простейшими тождественными преобразованиями.

Пример 1. Сложение однозначных чисел в первом классе:
$5+2=5+(1+1)=(5+1)+1=6+1=7$.

Пример 2. При ознакомлении с приемами поразрядного сложения многозначных чисел выполняются записи со ссылкой на законы сложения:

$$\begin{aligned}&234+542=\\&=(200+30+4)+(500+40+2)=\\&=(200+500)+(30+40)+(4+2)=\\&=700+70+6=776.\end{aligned}$$

Пример 3. Определение умножения. Замените сумму $7+7+7+7$ произведением: $7+7+7+7=7\cdot 4$.

Пример 4. Запишите выражение без скобок, чтобы результат не изменился:

$31-(12+14)$ – алгоритм вычитания суммы из числа,

$25+(8-16)$ – алгоритм прибавления разности и др.

В 5-6 классах тождественных преобразований немного. Вопрос о тождественных преобразованиях рассматривается без использования специальной терминологии, нет терминов «тождество», «тождественно равные выражения», «тождественные преобразования выражений». Главная цель – подготовка к изучению тождественных преобразований многочленов (приведение их к стандартному виду).

Основа тождественных преобразований (свойства арифметических действий, нуля и единицы, известные из начальной школы) повторяется.

Приведем примеры.

- Найдите значение выражения:
  $835+835+723+723+723+723+723+835$.

Решение:

$$\begin{aligned}&835+835+723+723+723+723+723+835=\\&=(835+835+835)+(\ 723+723+723+723+723\ )=\\&=835\cdot 3+723\cdot 5=2505+3615=6120.\end{aligned}$$

- Найдите значение выражения $36 \cdot 184 + 36 \cdot 816$.

Решение:

$$36 \cdot 184 + 36 \cdot 816 = 36 \cdot (184 + 816) = 36000$$

- Упростите выражение: $2 \cdot x \cdot a \cdot 4$.

Решение:

$2 \cdot x \cdot a \cdot 4 = 8ax$ – это фактически приведение одночлена к стандартному виду.

- Упростите выражение: $3a + 9a + 12a$.

Решение

$3a + 9a + 12a = (3 + 9 + 12) \cdot a = 24a$ – это фактически приведение подобных слагаемых.

Все внимание должно быть обращено на то, чтобы довести до автоматизма навыки правильных и быстрых преобразований (при условии, что ученики в любой момент по требованию учителя смогут обосновать проводимые преобразования).

Так как в 5-6 классах происходит расширение понятия числа, то все свойства действий индуктивно проверяются при переходе от одного множества чисел к другому.

Приведем примеры.

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$
- $\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{7}\right) + \frac{5}{6} = \frac{2}{9} + \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{6}\right)$
- $-7 + (-4) = (-4) + (-7)$
- $6 + (-9) = (-9) + 6$ и др.

При изучении действий с отрицательными числами появляются новые виды преобразований, математическая речь учащихся обогащается новыми терминами. Например, на основе законов сложения упрощают *вычисление суммы нескольких слагаемых*, складывая *отдельно положительные* числа и *отдельно отрицательные*, а затем к сумме положительных прибавляют сумму отрицательных:

$$-24 + (-16) + 17 + (-10) + 23 = (17 + 23) + (-24 - 16 - 10) = 40 + (-50) = -10.$$

Устанавливают, что $a - a = a + (-a) = 0$, и применяют это свойство для упрощения выражений вида: $-100 + a + 8{,}7 - a$, $-24 - x + 24 + x$ и др.

Заметим, что нежелательно произносить «x и $-x$ взаимно уничтожаются», лучше: «x и $-x$ в сумме дают нуль».

После изучения правила вычитания отдельно рассматривается *раскрытие скобок,* перед которыми стоит знак «+» или знак «–».

Заметим, что обоснование правил раскрытия скобок различное.

Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак « + », основано на сочетательном законе сложения и определении суммы трех и более слагаемых. Например, надо упростить сумму $-8 - y + (0{,}3 + y - c)$.

Изучение правила раскрытия скобок можно начать с напоминания о ранее выполненных преобразованиях вида:

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c.$$

В результате выполнения нескольких упражнений (использование неполной индукции) учащиеся сами сформулируют правило раскрытия скобок в общем виде. При закреплении правила необходимо обратить внимание на упражнения типа $(6-x)-34{,}7$.

$(6-x)-34{,}7=6-\tilde{o}-34{,}7$ (раскрываем скобки в выражении 0 + (6 – x)).

Несколько труднее объяснить правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак « – ». Рассмотрим один из вариантов объяснения.

Предложим задачу: «У мамы было 25 орехов. Одному ребенку она дала 7 орехов, другому 8. Сколько орехов осталось у мамы?».

Возможны рассуждения: «Сколько орехов мама отдала детям? $(7+8)$. Сколько орехов осталось у мамы?» Ответ: $25-(7+8)$.

Второй вариант рассуждений: «Мама сначала дала первому 7 орехов, а затем второму 8, т.е. $25-7-8$. Сравните результаты.

Оказалось: $25-(7+8)=25-7-8$.

Видим, что знаки каждого слагаемого, заключенного в скобки, изменились на противоположные. Затем можно сформулировать правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак « – ».

<u>Замечание.</u> Следует обратить внимание на то, что если, по мнению учащихся, перед скобками «не стоит никакого коэффициента», то необходимо разъяснить, что этот коэффициент равен 1.

В дальнейшем в упражнениях вида $a-2\cdot(c+b)$ при раскрытии скобок используют сначала распределительный закон, а затем правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак « – »:

$$a-2\cdot(c+b)=a-(2c+2b)=a-2c-2b.$$

Особо следует рассмотреть случай: $-(a+b)$.

$$-(a+b)=0-(a+b)=0-a-b=-a-b.$$

В 6-м классе вводится преобразование – вынесение общего множителя за скобки: $ac+bc=(a+b)\cdot c$. Это иное прочтение распределительного закона, известного учащимся. Вводится только новый термин.

Мы имеем возможность *назвать* еще один вид преобразований – приведение подобных слагаемых: $3a+4a-9a=(3+4-9)\cdot a=-2a$.

Возможные следующие ошибки учащихся.

Пример 1. Среди слагаемых содержится переменная с коэффициентом 1.

$$10a+a+3a=13a \quad (?!).$$

Для предупреждения и исправления ошибки необходимо поставить этот коэффициент и обращать внимание на количество слагаемых в данном выражении и на количество числовых слагаемых в скобках:

$$10a+a+3a=10a+1\cdot a+3a=(10+1+3)=14a.$$

Пример 2. Среди слагаемых есть члены, не содержащие переменных:

$$10a+12+3a=25a \quad (?!).$$

Здесь может помочь аналогия с размерностью.

Пример 3. В выражении встречаются разные переменные

$$a+c+a=3ac \quad (?!).$$

Это свидетельствует о том, что упражнение дано слишком рано, учащиеся еще не готовы к нему.

Итак, в пропедевтическом курсе:

1) закладываются основы тождественных преобразований, вот почему мы уделили изучению данного вопроса столько внимания;

2) рассматриваются важные виды тождественных преобразований (без прямого указания на то, что это тождественные преобразования): раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, вынесение за скобки общего множителя. Навыки обоснований выполняемых преобразований, доведенные до автоматизма, облегчат изучение в систематическом курсе тождественных преобразований целых выражений;

3) тождественные преобразования осуществляются на основе законов арифметических действий и свойствах нуля и единицы.

5. Некоторые методические особенности изучения тождественных преобразований в систематическом курсе алгебры

При изучении тождественных преобразований любого вида выражений следует рассмотреть следующие вопросы:

1) определение (или описание, если не дается определение),
2) теоретическая база, на которой основываются преобразования,
3) виды преобразований.

Сделаем ***следующие замечания*** к изучению конкретных видов тождественных преобразований.

5.1. Как любое математическое понятие тождественные преобразования выражений являются как *предметом*, так и *средством* изучения.

5.2. Заметим, что название выражения определяется его видом, поэтому следует ***правильно читать*** выражения. Например,

$ab-b^3$ – разность двух одночленов или двучлен,

$b\cdot\left(a-b^2\right)$– произведение одночлена на двучлен,

$\left(2x^2\right)^3$ – степень одночлена,

$(a+b)^2$ – квадрат двучлена,

$a^2+2ab+b^2$ – многочлен, тождественно равный квадрату двучлена,

a^2-ab+b^2 – неполный квадрат разности и др.

В связи с этим сделаем еще одно замечание об употреблении терминов. Нередко можно слышать вопрос: «Между какими из следующих пар выражений: $(a-b)^2$ и $(b-a)^2$, $(a-b)^3$ и $(b-a)^3$ можно поставить знак равенства?» (имеется в виду вопрос, какие из пар выражений будут тождественно равными). Знак равенства можно поставить между выражениями любых пар, только возникает вопрос: будут ли при этом выражения тождественно равными?

Учитывая замечание, вопрос следует задать, например, так: «Имеем выражения: $(a-b)^2$ и $(b-a)^2$, $(a-b)^3$ и $(b-a)^3$. В каких из указанных пар выражения будут тождественно равными?».

5.3. Как уже было сказано, в школьном курсе алгебры все «действия» над алгебраическими выражениями *только обозначаются*, а затем полученные выражения (например, сумма $(2a+b)+(3a-4b)$, произведение $3x^2y\cdot\left(2x^3y-4xy^4\right)$) *преобразуются* в тождественно равные выражения.

5.4. В связи с этим подчеркнем, что основная *задача тождественных преобразований* – не действия над выражениями, а *приведение выражений* к *стандартному* виду. Сделаем замечание по терминологии: «к стандартному», «к простейшему», «к нормальному», «к каноническому» — могут использоваться как синонимы.

5.5. При выполнении тождественных преобразований следует обращать внимание учащихся на то, что в каждом конкретном случае целью преобразований является представление выражения в виде, *удобном для решения поставленной задачи.*

Пример 1. Для нахождения значения выражения $28{,}5x+28{,}5y$ при $x=34{,}2$ и $y=65{,}8$ целесообразно представить его в виде $28{,}5\cdot(x+y)$. В этом случае вместо трех громоздких вычислений выполняется два и устно. Но если $x=10$, а $y=0$, то выполнение указанного преобразования – нецелесообразно.

Пример 2. Найти значение выражения $\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$ при $x=4\dfrac{7}{9}$ и $y=3\dfrac{5}{61}$. Непосредственная подстановка приведет к громоздким вычислениям, а преобразование дроби – к выводу о независимости значения выражения от значений x и y: $\dfrac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{xy}=\dfrac{4xy}{xy}=4$.

Пример 3. Чтобы выяснить, является последовательность $b_{\mathrm{n}}=\dfrac{n-3}{n}$ возрастающей или убывающей, полезно представить общий член в виде $b_n=1-\dfrac{3}{n}$ и сразу сделать вывод.

Пример 4. Часто для достижения цели бывает полезно не упростить, а усложнить выражение, выполнив тождественные преобразования. Примером могут служить преобразования, выполняемые при выводе формулы корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Квадратный трехчлен преобразуется в произведение: $ax^2+bx+c=a\left(õ^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$ и далее выделяется квадрат двучлена:

$$a(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})=\ a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

5.6. Одной из особенностей изучения тождественных преобразований является совместное изучений взаимно обратных преобразований. Например, умножение одночлена на многочлен и вынесение общего множителя за скобки, умножение многочлена на многочлен и разложение на множители способом группировки можно изучать на одном уроке или на двух последовательных уроках. Это дает выигрыш во времени и способствует качественному усвоению материала.

5.7. Говоря об особенностях системы упражнений, необходимо отметить, что тождественные преобразования выступают не как *самоцель*, а как *средство* для раскрытия свойств выражений и решения различного рода содержательных задач, в частности:

- для упрощения выражений;
- нахождения значения выражений;
- установления тождественного равенства двух выражений;
- решения уравнений, неравенств;
- исследования функций;
- для решения задач на делимость и т.д. (см. упр. на с.4).

В системе упражнений целесообразно усилить внимание к выполнению различных видов обратных задач, например, заменить знаки вопросов в следующих выражениях:

$$(? + ?)^2 = \left(36a^2 + 36ab + ?\right);$$

$$\left(2a + ?\right)^2 = ? - 8ab + ?;$$

$$4a^2 - ? = \left(? - 3b\right)\left(? + ?\right)$$ и др.

Громоздкие упражнения не являются целесообразными, так как отнимают много времени, а коэффициент полезного действия мал.

5.8. В качестве особенности тождественных преобразований отметим их алгоритмичность. Она заложена как в самом содержании, так и в правилах выполнения тождественных преобразований, и в формировании навыков тождественных преобразований.

Например, правило умножения дробей: чтобы умножить дробь на дробь, нужно: 1) перемножить их числители, 2) перемножить их знаменатели, 3) первое произведение записывать в числителе, а второе – в знаменателе.

Пример разложения многочлена на множители (план):

– вынести за скобки общий для всех членов множитель, если таковой имеется;

– если в скобках двучлен, проверить, не является ли полученное в скобках выражение разностью квадратов. Если да, то применить соответствующее тождество сокращенного умножения;

– если в скобках получился трехчлен, проверить, не является ли он квадратом двучлена. Если да, то применить соответствующее тождество сокращенного умножения;

– если в скобках невозможно применить тождества сокращенного умножения, надо попытаться произвести разложение на множители способом группировки.

Большое внимание уделяется формированию навыков тождественных преобразований. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований подробно изложены в статье Н. Г. Миндюк [14]. Рекомендуем ее изучить.

Задания для самостоятельной работы

1. Изучите статью Н.Г. Миндюк [14], составьте краткий конспект работы.
2. Законспектируйте статью Н.Я.Виленкина и С.И. Шварцбурда «Равенства, тождества, уравнения, неравенства» [2] .
3. Изучите статью И.В. Баума и Ю.Н. Макарычева [1].
4. Согласно классификации выражений (рис. 1,2) приведите примеры выражений всех видов.
5. Проиллюстрируйте на примерах, что тождественные преобразования выражений служат аналитическим аппаратом при:
   – доказательстве теорем и выводе формул,
   – решении уравнений, неравенств и их систем,
   – упрощении выражений,
   – нахождении значений выражений,
   – исследовании функций и др.

6. Покажите, какие тождественные преобразования выражений нужно выполнить при решении заданий, предложенных во введении к лекции 1.

7. Разработайте методику работы над понятиями: тождество, тождественно равные выражения, тождественные преобразования выражений, одночлен, многочлен, рациональная дробь.

8. Разработайте методику работы над тождествами:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$; $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$;

$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$.

Где возможно, дайте геометрическую иллюстрацию.

9. Разработайте методику совместного изучения взаимно обратных преобразований.

Список литературы

1. *Баум И.В*. Тождественные преобразования выражений/ И.В. Баум, Ю.Н. Макарычев// Преподавание алгебры в 6-8 классах./ Сост. Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк.– М.: Просвещение, 1980.С. 77-90.
2. *Виленкин Н.Я*. Равенства, тождества, уравнения, неравенства/ Н.Я.Виленкин, С.И. Шварцбурд// Математика в школе. – 1970. – № 4.
3. *Гастева С.А*. Методика преподавания математики в восьмилетней школе/ С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин и др.; под общей ред. С.Е.Ляпина.– М.: Просвещение, 1965. – Гл.5.– С. 351 (Целые и дробные выражения).
4. *Канин Е.С.* Алгебраические упражнения. 6 класс: пособие для учителей/ Е.С. Канин.– М.: Просвещение, 1975. – С. 52–64.
5. *Канин Е.С.* К формированию умений и навыков в вычислениях и тождественных преобразованиях/ Е.С. Канин// Математика в школе. – 1984. – №5.
6. *Колягин Ю.М*. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики: учеб. пособие для студентов физ.– мат. фак. пед. ин-тов/ Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин и др.– М.: Просвещение, 1977.– С.78–95.
7. *Крючкова В.В.* Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены». В.В. Крючкова// Математика в школе. – 1984. – №5.
8. Лященко Е.И. Методика обучения математике в 4-5 классах/ Е.И.Лященко, А.А. Мазаник. – Минск: Нар.асвета, 1976. – Гл. 4.– С. 187–196.
9. *Макарычев Ю.Н* Об учебниках алгебры 6 и 7 классов/ Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, С.Б.Суворова// Математика в школе. – 1985. – №3.
10. *Макарычев Ю.Н*. Тождественные преобразования многочленов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.С.Муравин // Математика в школе. – 1973. – № 1.
11. *Методика* преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец./ А.Я.Блох, В.А.Гусев, Г.В.Дорофеев и др; Сост. В.И.Мишин.– М.: Просвещение, 1987.– Гл. 5.
12. *Миндюк Н.Г.* Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов/ Н.Г.Миндюк// Математика в школе. – 1985. – №5.
13. *Пичурин Л.Ф* Методика преподавания математики в 4-5 классах. /Л.Ф Пичурин. – М.: Просвещение, 1981.– С. 31–32.
14. *Репьев В.В*. Методика преподавания алгебры в 8-летней школе. Пособие для учителей / В.В.Репьев. – М.: Просвещение, 1967.– Гл. 8, 10.

Методические рекомендации для организации самостоятельной работы студентов по теме «Тождественные преобразования выражений»

I. Теоретическая основа выполнения тождественных преобразований иррациональных выражений
   1. Определение квадратного корня из числа.
   2. Определение арифметического квадратного корня из числа.
   3. Определение модуля числа.
   4. Свойства арифметического квадратного корня.
      а) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \geq 0$

б) $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \not\subset R$

в) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$

г) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0, b > 0.$

II. Виды тождественных преобразований иррациональных выражений

1.Вынесение множителя из-под знака квадратного корня.

2.Внесение множителя под знак квадратного корня.

3. Освобождение от иррациональности в знаменателе (числителе).

4.Освобождение подкоренного выражения от дробности.

5. Приведение подобных радикалов.

Алгоритмы

1. Вынесение множителя из-под знака квадратного корня

1. Представить подкоренное выражение в виде произведения, в котором один или несколько множителей тождественно равны квадрату одночлена.
2. Заменить корень из произведения произведением корней.
3. Воспользоваться тождеством $\sqrt{a^2} = |a|$.
4. Освободиться, если требуется, от знаков модуля и выполнить тождественные преобразования рациональных выражений.

Пример.

$$-\sqrt{-a^3} = -\sqrt{a^2 \cdot (-a)} = -\sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{-a} = -(-a)\sqrt{-a} = a\sqrt{-a} \ .$$

2. *Внесение множителя под знак квадратного корня*

1. Выделить положительный множитель перед корнем.
2. Представить его в виде арифметического квадратного корня,

используя тождество $\sqrt{a^2} = |a|$.

3.Заменить произведение корней корнем из произведения, используя свойство $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

4. Выполнить тождественные преобразования рациональных выражений.

Пример.

$$a\sqrt{-a} = -(-a)\sqrt{-a} = -\sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{-a} = -\sqrt{a^2 \cdot (-a)} = -\sqrt{-a^3} \ .$$

<u>Методические задачи</u>

I. Учащимся предложено задание: «Найдите значение выражения $a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$ при $a = 5$».

Два ученика дали следующие решения:

1-й ученик: $a + \sqrt{1 - 2a + a^2} = a + \sqrt{(1-a)^2} = a + (1-a) = 1.$

2-й ученик: $a + \sqrt{1 - 2a + a^2} = 5 + \sqrt{1 - 2 \cdot 5 + 25} = 5 + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9.$

Ответьте на вопросы:

1) Кто решил правильно?
2) В чем ошибка другого? Как организовать работу по ее исправлению?
3) Какие ошибки еще могли допустить ученики?

II. ***Оцените решение следующих упражнений.*** Если решение неверное, объясните ученикам их ошибки. Дайте правильное решение.

а) $-a\sqrt{-a} = -\sqrt{a^2 \cdot (-a)} = -\sqrt{-a^3}$,

б) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b,\ a \ge 0, b \ge 0$,

в) $-a \cdot \sqrt{-a^3} = -\sqrt{a^2 \cdot (-a)} = -a\sqrt{-a}$,

г) решить уравнение: $\sqrt[6]{\sqrt[x]{9}} = 3$.

Решение. $\sqrt[6x]{9} = 3$; $\sqrt[6x]{3^2} = 3$; $3^{\frac{2}{6x}} = 3^1$; $\frac{1}{3x} = 1$; $x = \frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$;

д) вычислить: $((-2)^2)^{\frac{1}{2}}$.

Четыре ученика дали различные решения этой задачи.

1) $((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = (-2)^1 = -2$,

2) $((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$,

3) $((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

4) $((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = -2$.

Кто решил правильно? В чем причина ошибок остальных?

е) найти значение выражения $\sqrt{(a-5)^2}$ при $a = 2$.

Ученики дали решения:

1) $\sqrt{(a-5)^2} = a-5 = 2-5 = -3$,

2) $\sqrt{(a-5)^2} = \sqrt{(2-5)^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Кто решил правильно? В чем причина ошибки другого? Как он должен был записать решение?

Индивидуальные задания

1. Составьте тематический план изучения темы «Тождественные преобразования иррациональных выражений».
2. Разработайте методику введения понятий:
   – квадратный корень из числа a;
   – арифметический квадратный корень из числа a.
3. Подготовьте сообщение «О знаке корня» (воспользуйтесь источником [1] основного списка).
4. Разработайте методику работы над тождеством $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \ge 0$.
5. Разработайте методику работы над тождеством $\sqrt{a^2} = |a|$.
6. Разработайте методику изучения теоремы $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \ge 0, b \ge 0$.

7. Разработайте методику изучения теоремы $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$.

Рекомендации к выполнению заданий 6 и 7:

а) продумайте проблемные задания, убеждающие в необходимости изучения теорем;

б) при разработке методики осветите все этапы работы над теоремами.

8. Разработайте методику изучения вынесения множителя из-под знака квадратного корня.
9. Разработайте методику изучения внесения множителя под знак квадратного корня.
10. Разработайте методику изучения освобождения от иррациональности в знаменателе (числителе).
11. Разработайте методику изучения освобождения подкоренного выражения от дробности.
12. Разработайте методику изучения приведения подобных радикалов.
13. Выполните контрольную работу.

Вариант I	*Вариант II*
1. *Упростите выражения*:	1. *Упростите выражения*:
а) $10\sqrt{3} - \sqrt{48} - \sqrt{75}$;	а) $2\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$;
б) $\left(5\sqrt{2} - \sqrt{18}\right) \cdot \sqrt{2}$;	б) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{20}) \cdot \sqrt{5}$;
в) $\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)^2$.	в) $\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \cdot \left(4 + 2\sqrt{3}\right)$.
2. *Сравните числа* $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ *и* $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{22}$	2. *Сравните числа* $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{70}$ *и* $10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$.
3.*Упростите выражения*:	3. *Упростите выражения*:
а) $\frac{6 + \sqrt{6}}{\sqrt{30} + \sqrt{5}}$;	а) $\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}}$;
б) $\frac{x - y}{x - \sqrt{xy}}$, *где* $x > 0, y > 0, x \neq y$	б) $\frac{a - \sqrt{ab}}{b - \sqrt{ab}}$.
4. *Вынесите множитель из-под знака корня*: $\sqrt{-7y^3}$, *если* . $y < 0$	4. *Внесите множитель под знак корня*: $a\sqrt{5}$, *если* $a < 0$.
5. *Постройте график функции* $y = \frac{-2\sqrt{x^2}}{x}$.	5. *Постройте график функции* $y = -x\sqrt{x^2}$.

14. Подберите содержательные задачи, средством для решения которых являются тождественные преобразования иррациональных выражений (упрощение выражений, рационализация вычислений, сокращение дробей, решение уравнений и неравенств, нахождение значения выражений и др.).
15. Составьте лист взаимоконтроля по теме «Квадратные корни» в 8-м классе.
16. Разработайте методику введения понятий: корень n –й степени из числа a, арифметический корень n – й степени из числа a.

17. Разработайте методику изучения теоремы: а) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0, b \geq 0$.

18. Разработайте методику изучения теоремы: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$.

19. Разработайте методику введения понятий: корень n –й степени из числа a, арифметический корень n – й степени из числа a (воспользуйтесь [5] и [6]).

20. Разработайте методику изучения теоремы

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad a \geq 0, b \geq 0$$ (воспользуйтесь [5] и [6]).

21. Разработайте методику изучения теоремы

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$ (воспользуйтесь [5] и [6]).

22. Разработайте методику изучения теоремы
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, где $a \geq 0$, k– натуральное число и n – натуральное число, большее 1 (воспользуйтесь [5] и [6]).

23. Разработайте методику изучения теоремы: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, где $a \geq 0$, k и n – натуральные числа, большие 1 (воспользуйтесь [5] и [6]).

24. Разработайте методику изучения теоремы: $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$ (см. [5] и [6]).

25. Рассмотрите примеры преобразования выражений, содержащих радикалы (воспользуйтесь [5] и [6]).

Список литературы для выполнения индивидуальных заданий

1. *Глейзер Г.И.* История математики в школе/ Г.И Глейзер – М.: Просвещение, 1982. ИНТЕРВАЛЫ см. для сравнения на странице 19!

2. *Макарычев Ю.И.* Алгебра: учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений/ Ю.И. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2004.

3. *Макарычев Ю.И.* Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений

/Ю.И.Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И.Нешков, С.Б.Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1995.

4. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 8 кл.: в 2 ч. Ч.1: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г.Мордкович. – М.: Мнемозина, 2003.

5. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10 – 11 кл.: в 2 ч. Ч.I: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г.Мордкович.– М.: Мнемозина, 2003.

6. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10 – 11 кл.: В 2 ч. Ч.2: Задачник для общеобразоват. учреждений / А.Г.Мордкович, Л.О. Денищева,Т.А.Корешкова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская; под ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2004.

7. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 8 кл.: учебник для классов с углубленным изучением математики / А.Г.Мордкович. – М.: Мнемозина, 2002.

ЛЕКЦИЯ 2. СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ЛИНИЯ «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

План

Введение
1. Место и значение понятий уравнения и неравенства в ШКМ
2. Теоретические основы линии уравнений и неравенств
3. Основные этапы изучения уравнений и неравенств
4. Введение понятия уравнения (неравенства с переменной)
5. Методика обучения решению уравнений и неравенств

Заключение

Введение (Об исторической роли понятия уравнения в математике)

Имя самое алгебры есть арапское,
которые ее называют Алджабр Валмукабала,
то есть наверстать или соравнять.

А.Д. Кантемир

Наука алгебры и алмукабалы – это наука о
правилах, по которым узнают многие числовые
неизвестные по соответствующим им известным.

ал-Каши Д. [Цит. По: 24,с.31]

История математики свидетельствует, что слово «алгебра» появилось благодаря великому ученому, имя которого Мухаммед Ибн Мусса ал-Хорезми (787–850 гг.). В его книге «Китаб мухтасар аль джебр вал-мукабала» изложены решения простых и сложных задач арифметики, необходимые людям при дележе наследств, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов и прочего [10]. Для решения задач ал-Хорезми применял уравнения первой степени с одним неизвестным, используя свой метод «ал-джебр» и «вал-мукабала». В дословном переводе эти слова означают «восстановление» и «сопоставление».

Суть этого метода поясним на примере.

Пусть имеется уравнение:

$$7x - 5 = 3x - 2.$$

Применяя операцию «ал-джебр», получим
$7x + 2 = 3x + 5$.

Применяя операцию «вал-мукабала», получим

$4x = 3$, откуда $x = \frac{3}{4}$ [41, с.38].

$$\begin{array}{ccc} & & -2 \\ 7x & = & 3x \\ -5 & & \end{array}$$

Рис. 1

1. Место и значение уравнений и неравенств в ШКМ

1.1. Входной контроль. Ответьте на вопросы:

1. Что такое уравнение (неравенство)?

2. Являются ли уравнениями следующие выражения: $\sqrt{\tilde{o}^2} = |\tilde{o}|$; $(\tilde{o}-3)^2 = \tilde{o}^2 - 6\tilde{o} + 9$; $x^2 + y^2 = 9$; $kx + 1 = x + k^2$? (См. [28, с. 83]).

Резюме: Существуют следующие трактовки понятия уравнения в ШКМ:

– равенство с буквой, значение которой нужно найти [28, с. 83];

– равенство с переменной [1, с. 23];

– равенство двух функций ([25], задачи 1, 5);

– математическая модель задачи [7], [32, с. 19].

1.2. О различных точках зрения на понятие уравнения

«Классическое» понимание уравнения – «это запись постановки некоторой реальной задачи. Буквы в уравнении — это неизвестные (а не переменные!). Главное в решении уравнения — поиск способа его решения» [7, с. 3].

Чаще других в учебниках математики уравнение вводится двумя способами: 1) как равенство, содержащее неизвестное число и 2) как равенство с переменной. Непосредственно после указанных формулировок следует *определение* корня уравнения. В первом случае корень уравнения определяется как найденное значение неизвестного числа, а во втором — как значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Различие между этими подходами заключается в том, что переменная «пробегает» ряд значений, а неизвестное — это буквенное обозначение конкретного числа.

Очевидно, что учитель математики должен знать, почему по-разному трактуется понятие уравнения (подробнее об этом в п.4.1). Это поможет ему разобраться в подходе, реализованном в конкретном учебнике, а также при необходимости обобщить понятие уравнения при изучении уравнений с двумя переменными, при рассмотрении уравнений прямой, окружности, «уравнения свободного падения» и в других случаях использования термина «уравнение». Более подробно со всеми «за» и «против» каждой из указанных трактовок понятия уравнения можно ознакомиться в литературе [31], [36].

1.3. О месте и значении линии уравнений и неравенств в ШКМ

В школьном курсе математики уравнения служат для задания функции, геометрической фигуры (прямой, окружности и других геометрических мест точек), для решения текстовых задач.

Понятие уравнения в ШКМ не определяется, а вводится поясняющим описанием в пропедевтическом курсе математики как *равенство с переменной*[1] или как равенство с неизвестным [28] и в систематическом курсе алгебры ([1], [19] и др.). В дальнейшем обучении понятие уравнения также используется без определения [5], [6], [34]. Также обстоит дело с понятием неравенства. Даже в восьмом классе в главе «Неравенства» [2, с. 9], [33, с.175] понятие числового неравенства не определяется. (Аргументируйте это, выполнив задание 1 А и В из самостоятельной работы).

Уравнение – центральное понятие математики. В методике преподавания математики (МПМ) выделяют *три аспекта* его использования.

---

[1] Уравнением называется равенство, содержащее переменную [19, с. 16].

1. *Теоретико-математическая направленность* линии уравнений и неравенств состоит в изучении, во-первых, обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом, во-вторых, в изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем.

2. *Прикладная направленность* раскрывается широким использованием уравнения как простейшей математической модели в решении задач. Это способствует овладению учащимися методом математического моделирования на доступном для них материале и ознакомлению с одним из основных средством применения математики в других естественнонаучных дисциплинах (межпредметные связи).

3. Линия уравнений и неравенств выделена как одна из четырех основных содержательных линий школьного курса алгебры (проследите *самостоятельно* связь данной содержательной линии с другими, можно воспользоваться литературой, например [31], [36] и др.). Этот аспект рассматривается в МПМ как *направленность на установление связей* с остальным содержанием курса математики (внутрипредметные связи).

Проверка знаний по многим темам школьного курса математики (например задания части С итоговой аттестации) сводится к решению уравнений, неравенств и их систем. Однако приходится констатировать, что, несмотря на большое внимание, уделяемое изучению теории уравнений в школе, результаты овладения этими знаниями крайне низкие.

Цель данной лекции — представить основные методические аспекты изучения линии уравнений (неравенств) в ШКМ, знание которых позволит учителю математики успешно обучать понятиям линии уравнений и неравенств, а также их решению.

2. Теоретические основы линии уравнений и неравенств

2.1. ***Задания для предварительного обсуждения:***

а) Решите уравнение: $\sqrt{\tilde{o}-3}=5-\tilde{o}$;

б) Решите неравенство: $\sqrt{2-\tilde{o}}>\tilde{o}$;

в) Решите уравнение: $kx+1=x+k^2$;

г) На каких понятиях и свойствах основано решение уравнений (неравенств)?

2.2. ***Базовые понятия линии уравнений и неравенств ШКМ***

К *базовым понятиям* линии уравнений и неравенств относят:

- понятие уравнения (неравенства с переменной); понятие «числовые неравенства»;
- корень уравнения (решение неравенства);
- понятие области определения уравнения (неравенства);
- понятие равносильных уравнений (неравенств);
- понятие уравнения-следствия[2].

2.2.1. Определение уравнения и неравенства

[2] Подумайте, почему не рассматривается аналогичное понятие для неравенства.

Приведем определение уравнения, принятое в математике. «Пусть на множестве **М** зафиксирован набор алгебраических операций, x – переменная на **М**; тогда *уравнением* на множестве **М** относительно x называется предикат вида $a(x) = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – термы относительно заданных операций, в запись которых входит символ x» [31, с. 107]. Принятым в логике терминам «терм» и «предикат» соответствуют термины школьной математики «выражение» и «предложение с переменной».

Дихотомическое деление понятия «выражение» (см. рис. 2. «Виды выражений ШКМ» в лекции по ТПВ) приводит к выделению подмножеств «уравнения» и «неравенства». Таким образом, с логической точки зрения уравнение (неравенство) является выражением с переменной, содержащим знак равенства (отношения $<, >, \leqslant, \geqslant$).

Описание объектов подмножества «Выражение с переменной со знаком “ = ”», содержащегося в структуре выражений может служить *определением уравнения*. Аналогично, выражение с переменной, содержащее знак отношения ”>“ (”<“, “≥”, “≤”), принято называть неравенством [36]. Таким образом, в школьном курсе математики можно дать следующее определение: выражение с переменной, содержащее знак “ = ”, называется уравнением [26].

В действующих учебниках по математике для 5-6 классов и в курсе алгебры 7 класса уравнения рассматриваются как особые задачи на нахождение значения переменной (неизвестной). В частности, в учебнике по математике для 5 класса «уравнением называют равенство, содержащее букву, значение которой надо найти» [28, с. 83].

Понятие «неравенство» в школьном курсе алгебры вводится описательно, на *интуитивном* уровне (т.е. на уровне представления об объекте) [4], [33], хотя вполне может быть определено аналогично понятию уравнения.

2.2.2. Понятие равносильных уравнений (неравенств)

Определив уравнение как предикат, необходимо выяснить, каким правилам подчиняются *операции над уравнениями*. Как известно, это операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и др. Для решения уравнений особенно важно понимать смысл полученного после очередного преобразования уравнения, т.е. будет ли новое уравнение с тем же множеством решений или множество решений изменилось. С этой целью вводится *понятие равносильных уравнений*.

«Если из первого предложения следует второе и из второго следует первое, то эти предложения называются равносильными, т.е. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ тогда и только тогда, когда $A(x) \Rightarrow B(x)$ и $B(x) \Rightarrow A(x)$» [12, с. 213]. Эквивалентным этому определению является чаще используемая в школьном курсе математики следующая трактовка понятия равносильных уравнений: уравнения называются равносильными, «…если выполнены условия: области определения уравнений одинаковы и множества их корней равны» [31, с. 110].

Задание №1 для самостоятельной работы.

1. Выполните логико-математический анализ введения базовых понятий ШКМ (п. 2.2.):

а) понятия уравнения [1], [2], [28];

б) понятия «числовое неравенство» [3], [4], [33].

2. Какое понятие определено в предложении «Действительное число *a* **больше** (**меньше**) действительного числа *b*, если их разность $a - b$ — положительное (отрицательное) число. Пишут: $a > b$ ($a < b$)» [33, с. 175]?

3. Сравните определение равносильных уравнений, сформулированное выше (п. 2.2.2.), с определением, приведенным в школьном учебнике алгебры [1, с. 25]. В чем их сходство (отличие)? В чем причина различий, как вы считаете? Сделайте вывод.

2.2.3. Свойства равносильных уравнений (неравенств)

Сформулируем теоремы.

1^o. Если к обеим частям уравнения прибавить число или целое относительно неизвестного выражение, то получится уравнение, равносильное данному[3].

Используя математический язык, данное свойство можно записать следующим образом. Если данное уравнение обозначить $\grave{a}(x) = b(x)$ (1), а уравнение, полученное прибавлением *m* к обеим частям данного уравнения, — $a(x) + m = b(x) + m$ (2), то $\left(a(x) = b(x)\right) \Leftrightarrow \left(a(x) + m = b(x) + m\right)$ (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

I. Дано уравнение $a(x) = b(x)$ (1); полученное уравнение: $a(x) + m = b(x) + m$ (2). Докажем, что *любой* корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

Пусть x_0 – корень уравнения (1). Тогда по определению *корня уравнения,* при подстановке его в уравнение (1) получим верное числовое равенство: $a(x_0) = b(x_0)$. К обеим частям полученного числового равенства (по свойствам числовых равенств) можно прибавить любое число m, получим снова верное числовое равенство: $a(x_0) + m = b(x_0) + m$. Таким образом, x_0 – корень уравнения (2).

II. Рассмотрим уравнение $a(x) + m = b(x) + m$ (2). Докажем, что *любой* корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

Пусть x_1 – корень уравнения (2). Тогда по определению корня уравнения, при подстановке его в уравнение (2) получим верное числовое равенство: $a(x_1) + m = b(x_1) + m$. К обеим частям полученного числового равенства (по свойствам числовых равенств) можно прибавить любое число $-m$, получим снова верное числовое равенство: $a(x_1) = b(x_1)$. Таким образом, x_1 – корень уравнения (2).

Теорема доказана.

Следствие. Если выражение, стоящее в одной части уравнения, перенести в другую, сменив его знак на противоположный, то полученное уравнение будет равносильно данному.

2^o. Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число или выражение, *не равное нулю* и *имеющее смысл* при всех допустимых

[3] Сравните эту формулировку свойства с другими, например. [1], [2], [11]. Статья [11] в Прил. 2.

значениях входящей в уравнение переменной, то получится уравнение, равносильное данному. То есть, если имели уравнение $a(x) = b(x)$ и получили уравнение $a(x)\cdot m = b(x)\cdot m$, то $a(x) = b(x) \Leftrightarrow a(x)\cdot m = b(x)\cdot m.$

Или, если преобразованием уравнения $a(x) = b(x)$ получили уравнение $a(x)\cdot m(x) = b(x)\cdot m(x)$, то $a(x) = b(x) \Leftrightarrow a(x)\cdot m(x) = b(x)\cdot m(x),$ где $m(x) \neq 0,$ $x \in D(a);\ x \in D(b).$ Доказательство свойства аналогично.

2.3. ***Виды уравнений (неравенств) ШКМ***

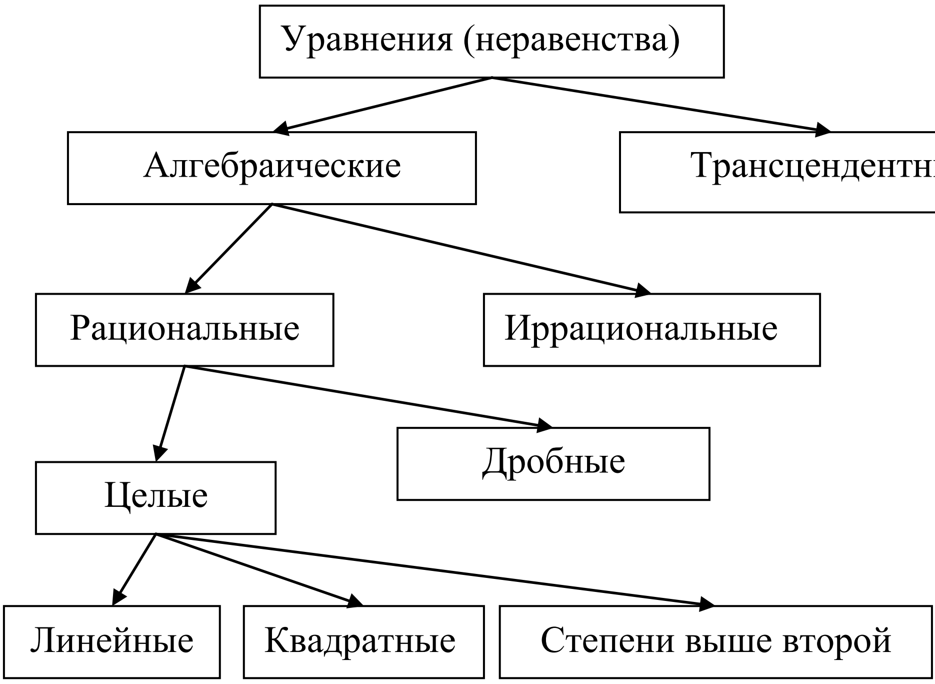


Рис. 2

Задание № 2 для самостоятельной работы.

1. Докажите второе свойство равносильных уравнений.

2. Изучите самостоятельно введение отношений «больше» («меньше»); проведите логико-дидактический анализ темы «Числовые неравенства и их свойства».

3. Сформулируйте и докажите свойства равносильности неравенств первой степени с одной переменной.

2.4. ***Основные методы решения уравнений (неравенств) в ШКМ***

Проиллюстрируем основные методы решения уравнений и неравенств школьного курса математики на примерах, предложенных для предварительного обсуждения (п. 2.1).

2.4.1. Метод *равносильных преобразований* алгебраических уравнений

$$\sqrt{x-3} = 5 - x \xleftrightarrow[\text{квадр. корня}]{\text{опр. арифм.}} \begin{cases} 5 - x \geq 0, \\ (5-x)^2 = x - 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x^2 - 11x + 28 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x = 4 \text{ или } x = 7. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

2.4.2. Метод *перехода к уравнению-следствию*

$$\sqrt{x-3}=5-x \Rightarrow \tilde{o}^2-11\tilde{o}+28=0 \Leftrightarrow (\tilde{o}=4 \text{ или } \tilde{o}=7).$$

<u>Проверка</u> (**обязательный компонент решения !**):

если $x=4$, то $\sqrt{4-3}=5-4,\ 1=1;$

если $x=7$, то $\sqrt{7-3}=5-7$. При $x=7$ выражение не имеет смысла.

Ответ: 4.

2.4.3. Метод *равносильных преобразований* в решении неравенств

$$\sqrt{2-\tilde{o}}>\tilde{o} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \tilde{o}>0, \\ 2-\tilde{o}>x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0, \\ 2-x\ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x^2+x-2<0; \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0, \\ x\le 2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ -2<x<1; \end{cases} \\ x\le 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ x\le 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,1)$.

Применение этих методов для каждого из видов уравнений, изучаемых в школе (рис. 2), приведено ниже в п. 5.1.2.

Задание № 3 для самостоятельной работы.

1. Изучите суть графического метода решения уравнений, неравенств, и их систем [3, с.172], [5, с. 39; 64], [25, с. 39], [31, с.121].
2. Подготовьте краткий конспект и презентацию для выступления.

3. Основные этапы изучения уравнений и неравенств[4]

3.1. *Пропедевтический этап* (1 – 6 классы)

<u>1 – 4 классы</u>

Формирование представления о понятии «уравнение» (с использованием термина). Решение простых уравнений, в которых буквой обозначено неизвестное слагаемое (уменьшаемое, вычитаемое, множитель, делимое, делитель).

Примеры. Реши уравнения:

390 – x = 197; x : 5 = 275;   456 : x = 4; x – 69 = 70 [32].

Решение задач с помощью уравнений.

<u>5 – 6 классы</u>

Изучение понятий уравнения, корня уравнений, что значит решить уравнение. Решение наряду с простыми уравнениями, более сложных, содержащих неизвестное в одной части уравнения [17], [28].

Например, (390 – x) : 5 = 40.

Решение уравнений, содержащих переменную в обеих частях уравнения. Для этого изучается правило переноса слагаемых из одной части уравнения в другую (шестой класс [19], [29][5]). Применение уравнений к решению текстовых задач.

3.2. *Систематическое изучение алгебраических уравнений и неравенств* (7 – 9 классы)

[4] Обратитесь к анализу Программы по математике для средней школы [37], [38].

[5] Иное содержание в учебниках Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон [17]–[19]. Выполните *самостоятельно* анализ изучения уравнений по этому учебнику.

7 класс. Понятие уравнения с одной и двумя переменными. Изучение понятия и свойств равносильных уравнений. Решение линейных уравнений, систем двух линейных уравнений с двумя переменными, применение уравнений и систем уравнений первой степени к решению текстовых задач.

8 класс. Понятие дробно-рационального и квадратного уравнений, их решение и применение к решению текстовых задач. Методы решения уравнений: разложение на множители, метод введения новой переменной.

Определение понятий «больше», «меньше», числовые неравенства и их свойства, неравенства с одной переменной и их решение.

3.3. *Изучение трансцендентных уравнений и неравенств* (10–11 кл.)

Особенностью изучения линии уравнений на данном этапе является то, что ознакомление с каждым видом уравнения и его решением предшествует изучению соответствующей функции.

Решение *простейших* трансцендентных уравнений и неравенств основано на теореме о корне [6, с. 62] и свойствах функций.

Задание № 4 для самостоятельной работы.

1. Выполните анализ решения простейших трансцендентных уравнений (тригонометрических, показательных, логарифмических).

2. Составьте конспект (презентацию к выступлению) для решения уравнений: $\sin x = a;$ $\cos x = a;$ $tgx = a;$ $ctgx = a;$ $a^x = b;$ $\log_a x = b.$

3. Изучите методы решения трансцендентных уравнений, проследите использование равносильных преобразований в их решении. Приведите обоснования преобразований. Например, в показательном уравнении дайте обоснование следующего преобразования: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Введение понятия уравнения (неравенства с переменной)

4.1. *Различные подходы к введению понятия уравнения*

В методике преподавания математики обозначились несколько подходов к введению понятия уравнения.

Первый, более ранний, относится к 60-м г.г. прошлого столетия [13] и характерен для курса алгебры средней школы. Систематическое изучение линии уравнений начиналось с рассмотрения уравнений с одним неизвестным. Введение понятия рекомендовалось начинать с вопроса *о равенствах*, обратив внимание учеников на то, что им приходилось много раз встречаться с такими формулами, в которых два алгебраических выражения соединены знаком равенства. «Два алгебраических выражения, соединенные знаком равенства, принято называть равенством» [13, с. 378]. Далее детально изучались численные (арифметические) равенства. «Равенства, в которых содержатся только известные числа, называются численными, или арифметическими. Для проверки арифметического равенства проводят вычисления левой и правой частей равенства» [там же]. Учащимся предлагались примеры, в которых требовалось сделать достаточно сложные вычисления. В современных учебниках учащимся предлагаются подобные упражнения при изучении числовых выражений, однако сложность их различна. Приведем примеры.

1.Проверьте истинность равенства: $\dfrac{28693:(7077-2978)\cdot 507}{35\cdot 202-51948:(1577-44\cdot 35)+334}=\dfrac{3549}{6000}$ [17, с.59].

2. Докажите равенство: $\dfrac{(20844:18-3384:36)\cdot 205-(255-48)^2+24729}{240\cdot 609+720\cdot[114240:(266000:4750)-1531]-1027:13\cdot 160}=\dfrac{2}{5}$ [18, с. 25].

После усвоения понятия арифметических равенств (в современных учебниках — числовых равенств) рекомендовалось «показать ученикам, что совсем иначе обстоит дело с равенством, содержащим буквенные выражения» [6, с. 378]. Например, предложение $987x-830y+4502z=40800149$ становится истинным или ложным при различных значениях переменных *x, y, z*: ($x=607, y=409, z=9005; x=609, y=407, z=9005$). На примерах таких равенств ученики подводятся к осознанию того, что эти равенства могут оказаться верными при одних значениях букв и неверными при других значениях букв, входящих в равенство.

Кроме того, рассматриваются примеры равенств с одной буквой, верных при единственном ее значении и неверном при всех других значениях. Наконец, рассматриваются равенства, которые становятся бессмысленными при некоторых значениях букв, входящих в них. Например, равенство $ax + 8 = 17$ теряет смысл при a равном 0, так как сумма $0\cdot x + 8$ не равна 17 ни при каком x. Затем изучается понятие тождества и его частный вид — числовые равенства. И только после всего выше перечисленного возможно введение понятия об уравнении как равенстве. Такой подход реализован в одном из действующих ныне учебников [2].

Второй подход основан на понятиях логики и теории множеств и, следовательно, наиболее близок к приведённому выше формальному определению уравнения (п. 2.2.1.). Формулировка определения следующая: «Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением» [31, с. 107]. Такой подход требует введения понятия выражения, предложения с переменной, равенства.

В современных учебниках, например [17], вводится понятие об алфавите *школьного математического языка* (ШМЯ), который представляет собой конечное множество символов (цифры, буквы латинского и русского алфавита, знаки действий и отношений, скобки и обозначения других математических объектов) [26]:

$$A=\{0,1,2,...,9, А, Б,..., Я, а, б,..., я, a, b, c,..., y, z,..., "+",..., ":", "=",..., (),..., \{\}, \varnothing,...\}.$$

Далее определяется понятие «выражение» как конечная совокупность символов алфавита математического языка, имеющая смысл (для арифметико-алгебраических выражений это означает, что оно должно иметь числовое значение). Наконец, можно сформулировать *определение* уравнения как выражения (или предложения) с переменной, содержащего знак “ = ”.

Опыт преподавания по учебникам Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон, а также по комплекту учебников алгебры А.Г. Мордковича [32], реализующих *деятельностный подход* в обучении, показывает возможность введения алфавита математического языка, а значит можно определить понятия выражения и уравнения (неравенства).

Третий подход, реализующий «классическое» понимание уравнения (уравнение как запись постановки некоторой задачи [7], как задачи о нахождении неизвестного числа [28] и др.) сужает объем понятия.

В современных учебниках математики основной школы не выдержан ни один из описанных выше подходов. В учебниках и для пятого, и для седьмого классов характерно введение понятия уравнения как *равенства с переменной* (неизвестной). Но, в отличие от *первого подхода*, соответствующей подготовки не осуществляется. Понятие равенства рассматривается на интуитивном уровне, начиная с начальной школы, и остается таковым в традиционном курсе математики пятого класса [28] и алгебры седьмого класса [1].

4.2. *Введение понятия уравнения на разных этапах обучения*

4.2.1. Анализ введения понятия уравнения в 5-м классе

Рассмотрим введение понятия уравнения в *традиционных* учебниках математики для пятого класса. В наиболее популярном учебнике уравнение вводится как «теоретическое сведение, которое надо знать наизусть» [28, с. 6]. Как известно, наизусть следует знать определения понятий, формулировки аксиом и теорем, правил (алгоритмов). Таким образом, предложению «Уравнением называют равенство, содержащее букву, значение которой надо найти» [28, с. 83] присвоен статус[6] определения понятия. Далее как следствия этого предложения можно рассматривать формулировки определения корня уравнения и сути задачи о решении уравнения: «Значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство, называют **корнем** уравнения» и «**Решить уравнение** — значит найти все его корни (или убедиться, что это уравнение не имеет ни одного корня)».

Понятие уравнения вводится конструктивно посредством описания решения задачи: «На левой чаше весов лежат арбуз и гиря в 2 кг, а на правой чаше — гиря в 5 кг. Весы находятся в равновесии. Чему равна масса арбуза?» (рис. 3). Эта задача, приводящая к модели $x + 2 = 5$, используется для выделения родового понятия и видовых отличий уравнения: равенство, содержащее букву, значение которой надо найти.

С точки зрения *деятельностного подхода* к обучению введению понятия должна предшествовать мотивация, осуществляемая, например, отделением знания от незнания. Известно, что мотив как опредмеченная потребность возникает в проблемной ситуации [30], являющейся источником действия, побуждением к нему. Мотивацией к познанию того, какой математический объект является уравнением, нельзя признать задачу с фабулой о чашечных весах (рис. 3). Рассмотренная выше задача из учебника является иллюстрацией примера практической ситуации, моделью которой является уравнение. Она не является проблемной для учащихся, не создает познавательного затруднения (мотивации к введению понятия), поскольку уравнения ученики решают с начальной школы.

---

[6] Анализ введения понятия уравнения в данном пособии считаем обязательным, поскольку *методика введения* этого понятия практически такая же, как в систематическом курсе алгебры [5].

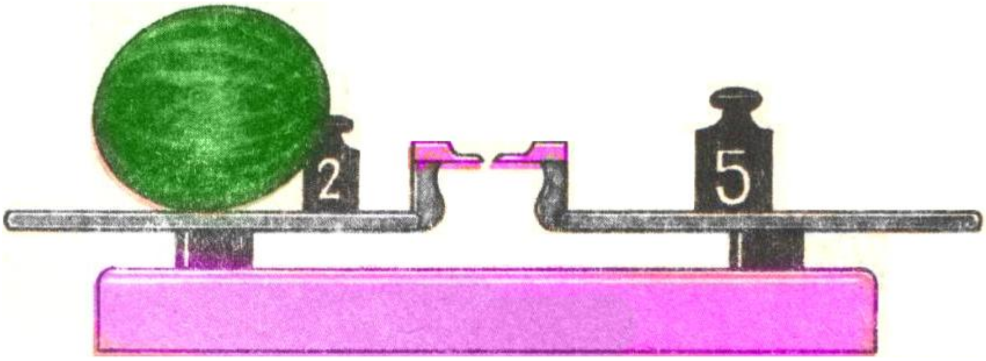


Рис. 3

Таким образом, понятие уравнения не определяется, т.е. изучается на наглядно-интуитивном уровне, формируется *представление* о понятии. Вопрос о видах уравнений в 5-м классе не обсуждается, рассматриваются уравнения с одним неизвестным в одной его части. В 6-м классе расширяется объем понятия уравнения: решаются уравнения с одним неизвестным в обеих частях уравнения.

Задание № 5 для самостоятельной работы.

1. Выполните анализ введения понятия уравнения в учебниках математики для *пятого* класса: [14], [18], [21].

2. Подготовьте краткий конспект результата логико-математического анализа учебного материала по каждому из указанных учебников.

4.2.2. Анализ введения понятия уравнения в курсе алгебры 7 класса

Понятие уравнения в курсе алгебры вводится так же, как в пятом классе — посредством задачи, при решении которой выбирается неизвестное, обозначается переменной и составляется модель — уравнение. Таким образом, понятие вводится конструктивно: равенство *с переменной* называют уравнением [1]. Анализ структуры этого предложения и предшествующего ему учебного материала показывает, что родовое понятие и видовое отличие вводимого понятия не формируются, а значит нет уверенности в их усвоении учащимися. В анализируемых учебниках [1], [2] и др. *описательно* вводятся понятия числового выражения, выражения с переменной, значение выражения как числового, так и с переменной. Понятие «равенство» самостоятельно не выделяется, не отрабатывается, что говорит о формировании его на интуитивном уровне, ведущем к эмпирическому типу мышления (по В.В. Давыдову [15] и др.). Это же можно сказать об изложении вопроса о понятии уравнения и его решении (равносильность уравнений, свойства равносильных уравнений) в систематическом курсе алгебры [1] и др.

Таким образом, оценивая введение понятия уравнения, заметим, что формулируется *поясняющее описание* понятия. Можно утверждать о формировании эмпирического типа мышления учащихся при введении понятия уравнения в 5 – 7-х классах [1], [14], [18].

Реализация деятельностного подхода к обучению ориентирует на развитие мышления учащихся теоретического типа [16], что означает введение понятия уравнения посредством *определения*. Например: *уравнением* называется выражение с переменной, содержащее знак “ = ”. Как показывает выше выполненный анализ (п. 4.1), осуществить это возможно, все условия для определения уравнения в школьном курсе математики имеются. *Однако в современных учебниках вопрос определения уравнения пока остается открытым.*

Рассмотрим пример введения *определения уравнения* как выражения с переменной, содержащего знак “ = ”.

Действие «определение понятия» [8] осуществляется совокупностью следующих операций:

- выделение родового понятия и видовых отличий (реализуемое приемом отбора или конструктивным приемом);
- введение термина и обозначения (если оно предусмотрено);
- формулировка определения в текстовой форме;
- формулировка определения в знаковой форме (символическая запись определения).

Из перечисленных операций при определении уравнения в 7-м классе реально востребованы только первая и третья, поскольку термин введен уже в начальной школе, а обозначение отсутствует. Четвертая операция действия определения понятия может быть реализована только в случае введения символики в обозначении многочлена. Например, «многочлен $2x^2-5x+3$ обозначают $p(x)$» [32, с. 55].

Выделение родового понятия «выражение с переменной» и видового отличия «содержащего знак “ = ”» целесообразно реализовать приемом отбора.

Предлагается выполнить следующие задания.

Задание 1. Рассмотрите выражения и определите, какое из них ***лишнее.*** Почему? Как называются все оставшиеся выражения?

1) $2x+5=x-3$;
2) $(6+8)\cdot 2+37$;
3) $(2x-5)\cdot 2=6$;
4) $(x+7)\cdot 5-4x$.

Ответ: лишнее второе выражение; остальные — выражения с переменной.

Задание 2. Укажите, какое из выражений с переменной является «третьим лишним». Почему?

1) $2x+5=x-3$;
2) $(2x-5)\cdot 2=6$;
3) $(x+7)\cdot 5-4x$.

Ответ: лишнее третье выражение. Остальные — выражения с переменной, содержащие знак «=».

Учащиеся могут ответить, что остальные — уравнения. Тогда следует уточнить, какое свойство отличает уравнения от третьего выражения.

Таким образом, выделено родовое понятие и видовое отличие. Учащиеся готовы сформулировать определение уравнения.

Изучение уравнений в 7-м классе ставит вопрос о видах уравнений (действие классификации). Вводится понятие *линейного* уравнения, и решаются линейные уравнения общего вида (*с параметром*) [1], [2]. Понятие целого уравнения не вводится [1], хотя учащиеся решают такие уравнения, сводя их к линейным посредством тождественных преобразований выражений и применением свойств равносильных уравнений (см. п. 5.1.2). В 7-м классе решаются целые уравнения степени выше первой: $(2x-5)\cdot(x+3)=0$; $(3-x)\cdot(3x+1)\cdot(x-1)=0$ и т.п. [1, с. 24]. Учащиеся могут выполнить умножение многочленов, раскрыв скобки, и получат уравнения, которые не являются приводимыми к линейным уравнениям: $2x^2+x-15=0$; $-3x^3+11x^2-5x-3=0$. Используя полученные примеры, можно выделить уравнения первой степени (линейные и приводимые к линейным) и уравнения степени выше первой (второй, третьей и др.). Этим можно показать *перспективу* дальнейшего развития теории уравнений в изучении алгебры, что способствует *мотивации учения*.

Таким образом, осуществление деятельностного подхода к *введению понятия* [8] позволяет учащимся усваивать определение понятия не в его итоговой форме, основанной на запоминании формулировки, а получить в ситуации особо организованной аналитико-синтетической деятельности. Совокупность *действий*, составляющих деятельность «введение понятия», способствует раскрытию основного содержания, заключенного в понятии.

5. Методика обучения решению уравнений и неравенств

5.1. *Обучение решению уравнений на разных этапах обучения*

5.1.1. Пропедевтический этап

Обучение учащихся решению простых уравнений по правилам *нахождения неизвестного компонента* арифметического действия в начальной школе и в пятом классе проводится на множестве натуральных чисел (см. п. 3.1.).

В дальнейшем обучении уравнения используются как средство мотивации при расширении множества натуральных чисел до множества Q_+, а затем до множества рациональных чисел Q. В свою очередь решение уравнений на множестве рациональных чисел способствует формированию у учащихся вычислительных навыков (овладению действиями с обыкновенными, десятичными дробями, с отрицательными числами).

Наряду с простыми уравнениями (п. 3.1) в пятом классе решаются сложные уравнения, содержащие переменную в одной части уравнения. Например, № 1010 (и): 15·(*k* – 0,2) = 21 [28, с. 294]; № 231(а): $\frac{7}{8}-\left(x+\frac{5}{12}\right)=\frac{5}{24}$ [18]. Несмотря на усложнение структуры уравнений, в решении по-прежнему используются правила нахождения неизвестного компонента действия (в данных примерах — неизвестного множителя и уменьшаемого; неизвестного вычитаемого и слагаемого). В приведенных примерах возможно использование упрощения выражений, стоящих в левой части уравнений, на основе распределительного закона и правила раскрытия скобок.

Таким образом, *теория решения уравнений* остается неизменной.

В 6-м классе изучается решение уравнений, содержащих переменную в обеих частях уравнения [29]. Необходимость нового способа решения уравнений мотивируется примером задачи, приводящей к такому уравнению (рис. 4). Модель чашечных весов способствует «открытию» способа решения уравнений вида: $5x = 2x + 6$.

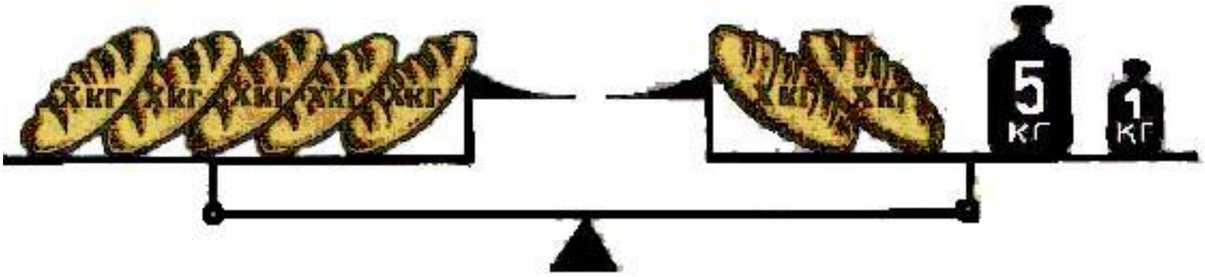


Рис. 4

С введением уравнений данного вида теория решения уравнений расширяется. Изученные правила переноса слагаемых из одной части уравнения в другую с изменением при этом знака слагаемого на противоположный и деления (умножения) обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля, в систематическом курсе алгебры получат название свойств равносильных преобразований уравнений [1].

Задание № 6 для самостоятельной работы.

1. Проведите логико-математический анализ примеров решения уравнений в учебниках для пятого класса [28][7]. Сделайте выводы.
2. Проведите логико-математический анализ примеров решения уравнений в учебниках для шестого класса [29]. Сделайте выводы.
3. Почему *проверка* уравнения является обязательным этапом решения в математике 5–х и 6–х классов?

5.1.2. О роли проверки в решении уравнений

Выше было отмечено (п. 4.2.2), что введение понятия уравнения, осуществленное в действующих учебниках [1], [2], [28] и других, способствует развитию эмпирического типа мышления учащихся. Возможно, это является причиной *формализма* в усвоении учащимися знаний об уравнениях и неравенствах.

Как известно, понятия являются главными составляющими любой науки, каждого учебного предмета. Обеспечение полноценного усвоения математических понятий — программное требование и одна из главных задач учителя. Обращение к школьной практике показывает, что «… эта задача решается не так успешно, как того требуют цели общеобразовательной школы» [40 с. 187]. Главным недостатком школьного усвоения понятий издавна считается формализм, суть которого состоит в том, что учащиеся, правильно воспроизводя определения понятий (формулировку поясняющих описаний), не умеют пользоваться ими в процессе решения задач и доказательстве утверждений.

Это, как показывают наблюдения, относится к изучению понятия уравнения. Например, учащиеся 5–7-х классов чаще всего записывают ответ, не выполнив *проверки* найденного значения неизвестного числа, принимая его за корень уравнения. То есть определение *корня уравнения* как значения буквы (перемен-

[7] Рассмотрите, например, уравнения на странице 83 и далее (учебник [28]).

ной), при котором из уравнения получается верное числовое равенство [1], [28], усвоено формально.

Пример из работы учащегося.

Решить уравнение: $(389 - x) : 5 = 41$.

$(389 - x) : 5 = 41;$

$389 - x = 41 \cdot 5;$

$389 - x = 205;$

$\underline{x = 194.}$

$(389 - 194) : 5 = 41;$

$41 = 41.$ Ответ: 194.

Такие «решения» уравнений очень часто приводят учащиеся начальной школы и пятого класса. В то время как привычка выполнять *действие контроля* (самоконтроль) — важнейшее составляющее «учебной деятельности» [16, с.19], характеризующее развитие критичности мышления школьника.

Требование проверки решения уравнения должно сохраняться до введения понятия равносильных уравнений. Только в этом случае равносильные преобразования будут восприниматься учащимися как *новый способ* решения уравнения, позволяющий обходиться без проверки найденного значения переменной. Понятие *равносильных уравнений* определяется в курсе алгебры 7 класса [1]. И с этого момента учащиеся должны *понимать* идею равносильных преобразований уравнений и *уметь обосновывать* переход от данного уравнения к следующему, ему равносильному. Тогда решение уравнений будет осознанным, а не формальным, причем устная проверка корня уравнения (самопроверка) должна стать привычкой, тем более что она должна быть сформирована.

5.1.3. Систематическое изучение алгебраических уравнений

В курсе алгебры основной школы учащиеся изучают уравнения первой степени (линейные и приводимые к линейным) и уравнения степени выше первой (квадратные, третьей и др.), дробные рациональные уравнения.

Решение уравнений первой степени с одной переменной

Рассмотрим линейное уравнение $kx + b = 0,$ где k и b – некоторые числа.

Решим уравнение $kx + b = 0$ при помощи равносильных преобразований. При $k \neq 0$, $kx + b = 0 \Leftrightarrow kx = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{k}$. Таким образом, если $k \neq 0$, то $x = -\frac{b}{k}$ (уравнение имеет единственный корень).

В случае $k = 0$ уравнение имеет вид $0 \cdot x + b = 0$.

Если $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней, а если $b = 0$, то любое (действительное) число является корнем уравнения.

Ответ: 1) при $k \neq 0$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{k}$,

2) при $k = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней,

3) при $k = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней.

Любое *уравнений первой степени* с одной переменной можно преобразовать в равносильное линейное уравнение (свойство 1).

Например, при решении уравнения $(2x-4)\cdot 3-5x=8-x$ упрощают выражение, стоящее в левой части. К полученному уравнению применяются свойства равносильных уравнений (п. 2.2.3): $x-12=8-x \Leftrightarrow 2x=20 \Leftrightarrow x=10.$

Решение уравнений с одной переменной степени выше первой

В 7-м классе учащиеся решают *целые уравнения* степени выше первой, используя свойства равенства произведения нулю: $(2x-5)\cdot(x+3)=0$; $(3-x)\cdot(3x+1)\cdot(x-1)=0$ и т.п. К уравнению такого вида обычно приводится с помощью равносильного преобразования и разложения на множители уравнение $f(x)=g(x)$.

В случае целого уравнения, если $f(x)-g(x)$ разлагается на множители, то имеем: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow \varphi_1(x)\varphi_2(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi_1(x)=0, \\ \varphi_2(x)=0. \end{array}\right.$

Квадратные уравнения имеют важное прикладное значение, к ним сводятся многие трансцендентные уравнения (показательные, логарифмические, тригонометрические).

«Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причём $a \neq 0$» [3, с. 286].

Решается полное квадратное уравнение с помощью *метода разложения на множители* его левой части и при помощи *равносильных преобразований*.

Решим квадратное уравнение. Так как $a \neq 0$, то

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Числитель дроби $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, т.е. выражение b^2-4ac, называют *дискриминантом квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$. Его обозначают буквой D. Значит, $D=b^2-4ac$. Используя обозначение дискриминанта, последнее уравнение можно записать в виде $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}$.

Знаменатель дроби $\frac{D}{4a^2}$ положителен, так как по определению квадратного уравнения $a \neq 0$. От D зависит, какие значения (положительные, нуль или отрицательные) принимает эта дробь. Рассмотрим отдельно каждый случай.

1. Если $D>0$, то $\frac{D}{4a^2}>0$. Получаем $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$ или $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$, т.е.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a} \\ x=-\dfrac{b-\sqrt{D}}{2a}. \end{array}\right. ;$$

Уравнение в этом случае имеет два корня: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

2. Если $D = 0$, то $\frac{D}{4a^2} = 0$.

Уравнение в этом случае имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Если $D < 0$, то $\frac{D}{4a^2} < 0$. В этом случае уравнение не имеет действительных корней.

В 8-м классе с изучением алгебраических дробей решаются *дробно-рациональные уравнения* с одной переменной: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Используя условие равенства дроби нулю, получим: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Таким образом, при решении уравнений используются свойства равносильных уравнений. Кроме основных свойств равносильных уравнений для каждого вида уравнений изучаются другие приемы. Так, целые уравнения чаще всего решаются с помощью метода разложения на множители, в более сложных из них используется метод введения новой переменной (метод подстановки).

Введение новой переменной как прием равносильных преобразований уравнений

Суть этого метода по отношению к уравнению $f(x) = g(x)$ состоит в том, чтобы найти функции $t = \varphi(x)$ и $y = h(t)$, для которых при любом $x \in D(f) \bigcap D(g)$ (т.е. для любого значения x из области определения уравнения) выполняется равенство $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow h(\varphi(x)) = 0.$

В этом случае достаточно решить уравнение $h(t) = 0$, а затем для каждого его корня t_0 решить уравнение $\varphi(x) = t_0$ (*). Совокупность всех полученных таким образом корней x уравнения (*), таких что $x \in D(f) \bigcap D(g)$, будет искомым множеством решений исходного уравнения. Функция $t = \varphi(x)$ называется *подстановкой*.

В случае алгебраических уравнений, как правило, в роли $\varphi(x)$ применяются многочлены, дроби или радикалы. В учебнике для 9-го класса [5] метод решения уравнений степени выше двух носит название *метода введения новой переменной*.

Задание № 7 для самостоятельной работы.

1. Проведите логико-математический анализ изучения алгебраических неравенств [4], [5], [33]. Сделайте выводы.
2. Проведите логико-математический анализ изучения трансцендентных неравенств [6], [34]. Сделайте выводы.

Список литературы

1. *Алгебра:* учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. В.Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – 10-е изд. – М. : Просвещение, 2008.
2. *Алгебра:* учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений /Ш.А. Алимов, Ю. М. Колягин и др. – М. : Просвещение, 1997. – 240 с.
3. *Алгебра:* учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений /Ш.А. Алимов, Ю. М. Колягин и др. – М. : Просвещение, 2001. – 240 с.
4. *Алгебра:* учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. В.Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2010.
5. *Алгебра 9:* учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. В.Суворова; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2006.
6. *Алгебра* и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.— М.: Просвещение, 1990. — 320 с.
7. *Башмако, М.И.* Давайте учить математике /М.И. Башмаков //Математика: Приложение к газете «Первое сентября».– 2010.– № 6.— С. 2–5, 48.
8. *Васильева Г.Н.* Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе. / Г.Н. Васильева. — Пермь, 2009. — 136 с.
9. *Васильева Г.Н.* Об изложении курса алгебры основной школы с позиций деятельностного подхода в обучении / Г.Н. Васильева. // Актуальные проблемы преподавания математики в педагогических вузах и средней школе: тез. докл. XXIII Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и пед. вузов, 13—15 октября 2004 г./ гл. ред. Е.В. Яковлев. — Челябинск; М., 2004. — С. 197.
10. *Виленкин Н.Я.* За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: кн. для учащихся 10–11 кл. общеорбразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с.
11. *Виленкин Н.Я.* Равенства, тождества, уравнения, неравенства / Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд // Математика в школе.–1970.– № 4. —С. 4.
12. *Виленкин Н. Я.* Современные основы школьного курса математики / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1980. – 377 с.
13. *Гастева С. А.* Методика преподавания математики в восьмилетней школе. / С. А. Гастева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин, М. И. Шидловская; под общей ред. С. Е. Ляпина. – М. : Просвещение, 1965. — 743 с.
14. *Гельфман Э.Г.* Натуральные числа и десятичные дроби: Практикум: учебн. пособие по математике для 5-го класса / Э.Г. Гельфман и др. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998.– 228 с.
15. *Давыдов В. В.* Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования / В.В. Давыдов — М.: Академия, 1986. – 240 с.
16. *Давыдов В.В.* Содержание и структура учебной деятельности учащихся/ В.В. Давыдов // Формирование учебной деятельности школьников. — М., 1982. — С. 10–21.
17. *Дорофеев Г. В.* Математика. 5 класс. В 3 ч. Ч. 1 / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М. : Ювента : Просвещение, 2005.

18. *Дорофеев Г. В.* Математика. 5 класс. В 3 ч. Ч. 2 / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М. : Ювента : Просвещение, 2010.
19. *Дорофеев Г. В.* Математика. 6 класс. Ч. 3 / Г.В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М. : Баласс : С-инфо, 2002.
20. *Епишева О.Б.* Специальная методика обучения арифметике, алгебре и началам анализа в средней школе / О.Б. Епишева. – Тобольск, 2000.
21. *Зубарева И.И.* Математика. 5 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2003. – 293 с.
22. *Колягин Ю.М.* Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики / Ю.М. Колягин и др. – М., 1977.
23. *Лабораторные* и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Под ред. Е.И. Лященко / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.
24. *Лиман М.М.* Школьникам о математике и математиках: пособие для учащихся 4-8 кл. сред. шк. / сост. М.М. Лиман. – М.: Просвещение, 1981.–80 с.
25. *Литвиненко В.Н.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
26. *Лященко Е.И.* Методика обучения математике в 4-5–х классах / Е.И. Лященко, А.А. Мазаник. — Минск: Нар. асвета, 1976. — 222 с.
27. *Математика*: учеб. для 3 кл. трехлет. нач. шк. / А.С. Пчелко, М.А. Бантова, М.И. Моро, А.М. Пышкало. – 18-е изд. — М. : Просвещение, 1991. – 207 с.
28. *Математика* : учеб. для 5 кл. ср. шк. / Н.Я. Виленкин, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд, В.И. Жохов. – 3-е изд., испр. и доп.– М. : Мнемозина, 2003. – 384 с.
29. *Математика* : учеб. для 6 кл. ср. шк. / Н. Я. Виленкин, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд, В. И. Жохов. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2004. – 304 с.
30. *Мельникова Е. Л.* Проблемный урок или как открывать знания с учениками: пособие для учителя / Е.Л. Мельникова. – М., 2002. — 168 с.
31. *Методика* преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
32. *Мордкович, А. Г.* Алгебра. 7 кл.: в 2 ч. Ч. 1 : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – 4-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2001. – 160 с.
33. *Мордкович А. Г.* Алгебра. 8 кл.: в 2 ч. Ч. 1 : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – 4-е изд. – М. : Мнемозина, 2002. – 223 с.
34. *Мордкович, А. Г.* Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. сред. шк.: в 2 ч. Ч 1 : / А. Г. Мордкович. – 10-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2009. – 399 с.
35. *Образовательный* стандарт основной школы : материалы семинара, п. Салтыковка Моск. обл., 3–5 апреля 2002 г. – М., 2002.
36. *Плакатина О.И.* Специальная методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие по теории и методике обучения математике для студентов педагогических вузов специальности 032100 – «Математика». — Иркутск, 2004.

37. Программа общеобразовательных учреждений. Алгебра 7–9 классы / сост. Т.А. Бурмистрова. – М. : Просвещение, 2009. – 256 с.
38. *Региональный* стандарт для общеобразовательных учреждений Пермской области: "Математика" /Департамент образования и науки администрации Перм. области ; ПГПУ. – Пермь, 2001.
39. *Столяр А.А.* Педагогика математики / А.А. Столяр. – Минск, 1986. – 414 с.
40. *Талызина Н. Ф.* Педагогическая психология: учеб. для студентов учеб. заведений сред. проф. образования /Н. Ф. Талызина. – М. : Академия, 2003.–288 с.
41. *Чистяков В.Д.* Исторические экскурсы на уроках математики в средней школе / В.Д. Чистяков. – 2-е изд. — Минск : Нар. Асвета., 1969. — 111 с.
42. *"Школа 2000…".* Математика. 5–6 классы : метод. материалы к учеб. математики Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон / сост. Л. Г. Петерсон. – М. : УМЦ "Школа 2000…", 2003. – 240 с.

Методические рекомендации к изучению темы «Неравенства» в школьном курсе математики

1. Место, значение темы.
2. Логико-математический анализ содержания темы: «Неравенства» в основной школе.
3. Сведения о сравнении чисел и неравенствах, известные учащимся из курса обучения в начальной школе и 5– 6-х классах.
4. Методика изучения неравенств с переменной:

1) введение понятий: неравенство с одной переменной; решение неравенства; равносильность неравенств;

2) изучение свойств равносильных неравенств.

Общее задание:

1. Выполните задания № 1 –№3, №7 для самостоятельной работы по теме, предложенные в лекции. Представьте письменный вариант выполнения указанных заданий.
2. Выполните индивидуальное задание.

Темы индивидуальных заданий

1. Числовые неравенства и их свойства. Методика изучения свойств числовых неравенств.
2. Доказательство неравенств. Способы доказательства неравенств. Методика обучения доказательству неравенств.
3. Методика изучения применение числовых неравенств к вычислениям с приближенными данными.
4. Методика изучения решения неравенств:
   1) линейных неравенств;
   2) квадратных неравенств;
   3) дробно-рациональных;

4) иррациональных;
5) трансцендентных неравенств;
6) неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Темы рефератов

1. Методика обучения решению неравенств с параметрами.
2. Методика обучения графическому решению систем неравенств. Использование средств обучения при графическом решении систем неравенств (шаблоны, компьютерные презентации с анимацией и др.).
3. Методика изучения (определение; основные типы неравенств и способы их решения; средства обучения):
а) показательных неравенств;
б) логарифмических неравенств;
в) тригонометрических неравенств;
г) неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.
4. Прикладные аспекты уравнений и неравенств (логарифмические, тригонометрические, с переменной под знаком модуля).
8. Типичные ошибки, допускаемые учащимися при решении неравенств, и методика их устранения.
9. Роль неравенств с переменными в изучении свойств функции и использование свойств функций при решении неравенств с переменными.
10. Способы решения неравенств (аналитический и графический).
11. Неравенства в школьном курсе математики: библиографический список статей, опубликованных в газете «Математика» за 2001-2011 г.г. (с аннотацией).

Дополнительная литература

1. *Глейзер Г.И.* История математики в школе VII-VIII классы/ Глейзер Г.И. – М.: Просвещение, 1982. С.18.
2. *Иванова Е.Ю.* Такой простой метод/ Иванова Е.Ю.// Математика в школе. - 1998. – №2. – С.18.
3. *Корчевский В.Е.* Салимжанов Р.М. Опыт применения тестов на уроках математики/ Корчевский В.Е.// Математика в школе. – 1996. – №2. – С. 37.
4. *Кривова В.А.* Разноуровневые тесты в обучении решению неравенств/ Кривова В.А.// Математика в школе. – 1998. – №2. – С. 23.
5. *Макарычев Ю.Н.* и др. Об учебном пособии по алгебре для 8-го класса/ Макарычев Ю.Н.// Математика в школе. – 1979. – №3. – С. 35.
6. *Самсонов П.И.* О предупреждении ошибок учащихся в решении логарифмических уравнений и неравенств/ Самсонов П.И. // Математика в школе. – 2011. – №6. – С. 32.
7. *Санина Е.И.* Педагогическая диагностика результативности изучения неравенств/ Санина Е.И.// Математика в школе. – 1998. – №2. – С.65.
8. *Севрюков П.Ф.* Особенности решения логарифмических неравенств/ Севрюков П.Ф.// Математика в школе. – 2011. – №1. – С. 46.

ЛЕКЦИЯ 3. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

План

Введение

1. Основная цель и значение изучения данной темы.

2. Характеристика этапов по обобщению понятия «степень» и подготовка к изучению показательной функции на множестве действительных чисел.

3. Примерная схема рассуждений, относящихся к методике уроков систематизации и обобщения сведений о степенях.

Введение

При любых изменениях содержания школьных программ в них должен оставаться «костяк», или «ядро» (термин А.Г. Мордковича), таких тем, без изучения которых учащиеся не получат представления о математике и ее методах. Совокупность таких тем получила название «содержательно-методических линий» школьного курса математики.

В курсе алгебры и начал анализа стандартом выделяются линии, представленные на схеме (рис.1).

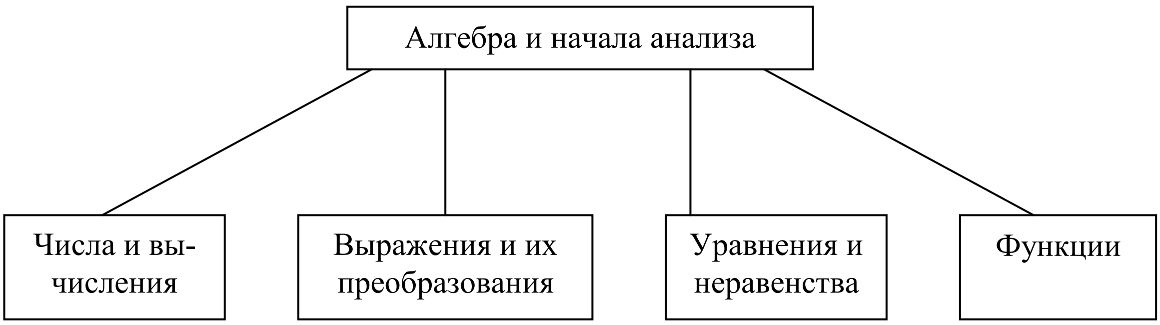


Рис. 1

В данной лекции рассмотрим методические особенности изучения выражения вида a^x.

1. Основная цель и значение изучения данной темы

1) В математике реальные процессы описываются на особом математическом языке и в виде математических моделей. Выражение a^x называется степенью (где a – основание степени, x – показатель степени) и является формой выражения обширного класса процессов, называемых процессами естественного роста или убывания величин.

Иначе говоря, данное выражение является моделью функции $y = a^x$, которая называется показательной, занимающей важное место среди трансцендентных функций.

Примеры процессов, происходящих в реальной действительности, которые достаточно полно и точно можно описать с помощью данной функции:

- распад радиоактивных веществ;
- изменение атмосферного давления с изменением высоты над уровнем моря;

- падение температуры охлаждаемых тел;
- размножение живых организмов (размножение холерного вибриона);
- изменение вклада в сберегательной кассе, положенного под определенный годовой процент и др.

Слово «трансцендентный» происходит от латинских слов transcendens-transcendo, т.е. «выхожу за границу». Термин «трансцендентный» стал впервые применять Л. Эйлер (1707-1783) в 1775 г.

2) Важную роль в вычислительной технике играют таблицы, а также шкалы значений показательной функции в счетных приборах (счетные линейки, номограммы). Выделяют значимые частные случаи показательных функций $y=10^x, y=e^x$ – экспоненциальная функция и её график экспоненту.

3) Классические задачи показательного роста и убывания приводят к дифференциальным уравнениям, решением которых служит показательная функция.

Итак, показательная функция в школьном курсе математики:

- имеет значимую роль в математическом образовании; в формировании диалектического, функционального стиля мышления;
- раскрывает общенаучную и общекультурную роль математики;
- создает возможности эстетического, экологического воспитания и профессиональной ориентации учащихся.

2. Характеристика этапов по обобщению понятия «степень» и подготовка к изучению показательной функции на множестве действительных чисел

Подготовка к изучению показательной функции содержит достаточно большой материал, который рассматривается с пятого по десятый класс и проходит в несколько этапов. Это объясняется следующими причинами.

1). Школьное обучение в некоторой степени повторяет исторический путь человеческих открытий в целом: в этом и состоит исторический подход к обучению. Закономерности истории развития математического знания включают его возникновение, углубление, расширение, обобщение с течением времени.

2). С психологической точки зрения понимание и усвоение математического материала проходит этапа:

а) фрагментарное понимание и усвоение;

б) логически необобщенное понимание и усвоение;

в) логически обобщенное понимание и усвоение.

Поэтому в программе заложены также три этапа формирования понятия показательной функции:

1. Пропедевтический курс (5-6 кл.): возведение в степень с натуральным показателем.

2. Изучение основного содержания: определение степени с натуральным и целым показателем, свойства степеней, действия со степенями (7-9 кл.).

3. Углубление, обобщение и систематизация знаний о степени; степень с любым действительным показателем; преобразование выражений, содержащих

степени; определение показательной функции; решение показательных уравнений и неравенств (10-11 кл.).

Одна из основных целей последнего этапа – привести в систему и обобщить имеющиеся у учащихся сведения о степенях, ввести понятие степени с любым действительным показателем. В зависимости от реальной подготовки класса эти уроки разрабатываются либо как уроки повторения, либо как уроки изучения нового материала. Целесообразно иметь таблицу (рис.2).

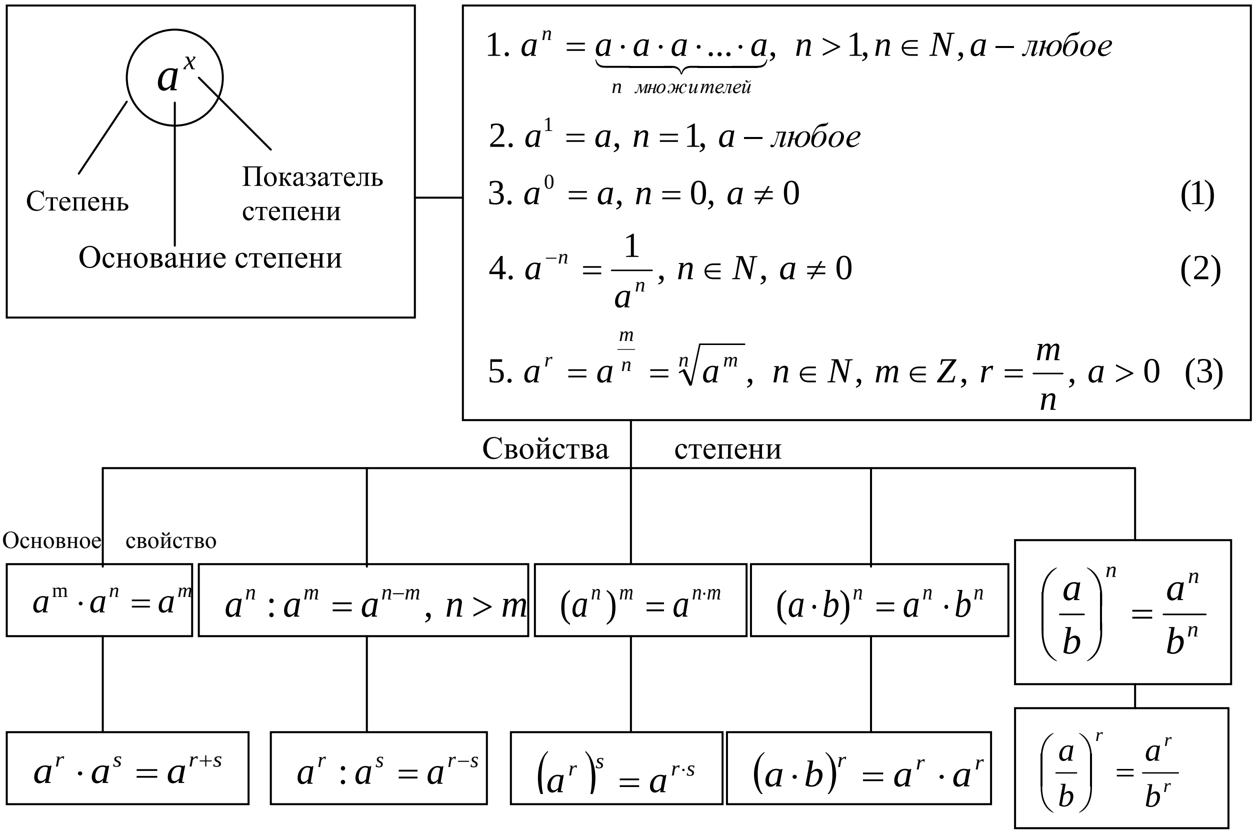


Рис. 2

За обозначением a^x для учащихся скрывается пять разных определений (см. рис. 2). Что общего в этих определениях, почему эти разные определения дают единую картину изменения функции?

Имеет место следующий факт:

1. Разные определения объединяются общим обозначением.
2. Оказывается, что получившаяся функция описывает самые разные процессы.

Разъяснить эти факты поможет повторное рассмотрение вопроса об определении степени с разным показателями и введение степени с любым действительным показателем. Этот материал изучают в 10-м классе.

Все свойства степеней имеют место при выполнении тех условий (ограничений), при которых действует соответствующее определение степени.

При обобщении понятия степени следует привести в систему знания, накопленные на протяжении нескольких лет (5-9 кл.).

При повторении материала следует привлечь внимание учащихся к тому главному, что имеет значение при обобщении понятия степени.

1) Восстановить в памяти и полностью довести до понимания, что a^n есть сокращенная запись $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$, и поэтому символ a^n имеет смысл при натуральном n. Поэтому правила действий могут применяться лишь тогда, когда не только компоненты, но и результат действия оказывается степенью с натуральным показателем, так как $a^n : a^n$ пока не выполнимо по правилу деления степеней.

2) Следует ограничиться повторением основного свойства степени и следствий, вытекающих из него; обратить внимание, при каких значениях букв правила действий со степенями могут применяться.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \ \ \forall a, \forall m, n - (n, m \in N).$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \ a \neq 0, \ m > n.$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}, \ \forall a, \forall m, n.$$

3) Основной вопрос содержания этой темы: какой смысл следует придать (вложить) в новые символы $a^0, a^{-n}, a^{\frac{m}{n}}, a^{\alpha}$, т.е как определить их, сохранить неизменными старые правила действий, сделав ненужными ограничения, которые вытекали из первоначального определения степени с натуральным показателем и обратить внимание на новые ограничения.

4) Нужно, чтобы определения понятий $a^0, a^{-n}, a^{\frac{m}{n}}, a^{\alpha}$ были даны не формально, не в виде немотивированных формулировок, а был бы вскрыт ход мысли, который побудил принять именно такие определения (новое определение). Все определения степени (1), (2), (3) (рис. 1) являются определениями – условными соглашениями. Задача учителя состоит в том, чтобы показать целесообразность соответствующего соглашения.

3. Примерная схема рассуждений, относящихся к методике уроков систематизации и обобщения сведений о степенях.

3.1. Какой смысл следует придать выражению a^0, как определить его, чтобы правило умножения степеней осталось в силе?

Умножим по этому правилу a^0 на a^m, (вопреки запрету: показатели должны быть натуральными).

$$a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m.$$

При $a^m \neq 0$, т.е. $a \neq 0$ произведение двух сомножителей a^0 и a^m может равняться одному из них $\left(a^m\right)$ тогда и только тогда, когда другой сомножитель $\left(a^0\right)$ равен 1.

Значит известное правило умножения степеней сохраняется лишь в том случае, если при любом $a \neq 0$ выражение a^0 будем считать равным 1.

<u>Определение.</u> $a^0 = 1, \ a \neq 0.$ (1)

Теперь правило $a^m : a^n = a^{m-n}$ может применяться и для $m = n$, так как a^0 имеет смысл. Следует отметить, что результат деления a^n на a^n в форме a^0 полностью согласуется с результатом арифметики $a^n : a^n = 1$.

3.2. Какой смысл придать выражениям $2^{-1}, 3^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ и т.д. a^{-n}, где $n \in N$? Имеют ли смысл эти выражения?

Определяя степень с целым отрицательным показателем, следует учесть:

1. Натуральное число – есть частный случай целого числа, а потому степень с натуральным показателем является частным случаем степени с целым показателем.

2. Нужно позаботиться о том, чтобы новое определение не противоречило степени с натуральным показателем: должно быть так, чтобы выражение $2^{-(-3)}$ означало ничто иное, как 2^3.

3. Определить степень с отрицательным показателем так, чтобы сохранилось основное свойство степени и следствия из него.

Итак, остается в силе $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, когда m и n какие угодно отрицательные числа. Пусть $m = -n$, тогда $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, a \neq 0$. Произведение двух целых чисел равно единице тогда и только тогда, когда сомножители – взаимно обратные числа, т.е. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Значит основное свойство степени сохранится лишь в том случае, если при любом $a \neq 0$ выражение a^{-n} будет считаться равным $\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

<u>Определение.</u> $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$. (2)

Записанные равенства при необходимости используют справа налево,

например, $\frac{1}{5} = 5^{-1}, \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$.

Появляются важные тождества $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{n}\right)^n; \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n, a \neq 0.$

Итак, формулы (1) и (2) принимают за определение степени с нулевым и отрицательным показателем. При такой договоренности все другие свойства сохраняются, кроме случая $0^n = 0, n \in N$, но для $a = 0$ и $n < 0$ символ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ теряет смысл. Такой принцип построения в науке называют принципом *перманентности* - (permanere – остаться, сохраняться), сохранение основных формальных законов действий).

В несовершенной форме этот принцип сформулировал в 1830 г. английский математик Дж. Пикок.

Полностью и четко установил его немецкий математик Г. Генкель в 1867 г..

Принцип перманентности соблюдается и при обобщении понятия числа; при определении общего понятия равенства фигур и др. (Вспомните реализацию этого принципа из лекций «Изучение числовых множеств», «Преобразование фигур в школьном курсе геометрии»).

Действительно, $2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8,\ 2^{-(-3)} = \dfrac{1}{2^{-3}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2^3}} = 2^3 = 8.$

3.3. Дальнейшим этапом систематизации сведений о степенях является распространение понятия степени на случай рациональных показателей.

Какой смысл можно придать символам $2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{1}{2}}$?

Снова предъявим требования к определению степени $a^{\frac{m}{n}}$, где $n \in N, m \in Z$.

1) Попробуем определить степень с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}} = a^r$ так, чтобы сохранилось основное свойство степени $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$.

2) Заметим, что число a^r должно быть положительным. В самом деле $a^r = a^{\frac{r}{2}\cdot 2} = \left(a^{\frac{r}{2}}\right)^2 > 0$, т.е. $a^r > 0.$

3) Должна быть определена степень a^{-r}, т.к. $a^{-r} = a^{r(-1)} = \left(a^r\right)^{-1}$.

4) Каким должно быть a? $\left(a^r\right)^{\frac{1}{r}} = a^{r\frac{1}{r}} = a^1 = a > 0.$

Вывод: Степень a^r определяется только при положительном основании a и сама степень a^r также является положительным числом (r – любое рациональное число).

Итак, мы получили те ограничения, которые нужно ввести при определении степени с рациональным показателем.

Но как получить (построить) само определение степени a^r?

Представляет интерес идея математика и методиста И.В. Арнольда, который предлагает рассматривать показатель степени как *оператор.*

Идея Арнольда может быть применена на практике, если рассматривать параллельно действия умножения и возведения в степень.

<u>При умножении</u>: множитель – оператор, показывает, на сколько слагаемых надо разбить множимое и сколько их взять.	<u>При возведении в степень</u>: показатель степени – *оператор*, показывает, на сколько множителей надо разбить основание степени и сколько их взять.

$6 \cdot 2 = 6 + 6$	$8^2 = 8 \cdot 8$
$6 \cdot \dfrac{1}{3} = 2,\ 6 = 2 + 2 + 2$	$8^{\frac{1}{3}} = 2,\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$6 \cdot \dfrac{2}{3} = 2 + 2 = 4,\ 6 = 2 + 2 + 2$	$8 \cdot \dfrac{2}{3} = 2 \cdot 2 = 4,\ 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

От этих рассуждений не трудно перейти к общим

$a \cdot \dfrac{m}{n} = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{m\ слагаемых},\ a = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{n\ слагаемых}$	$a^{\frac{m}{n}} = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{m\ сомножителей},\ a = \underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n\ сомножителей}$

Итак, возвести число a в степень $\dfrac{m}{n}$ с дробным показателем, значит: разбить это число a на n равных сомножителей и перемножить m таких сомножителей.

Схематически обозначается так:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b,\ a = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ сомножителей}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = b^m,\ a = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{b^m\ (m-сомножителей)} \cdot \ldots \cdot b\ (n - сомножителей)$$

Обобщая вышесказанное, приходим к определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Эта идея И.В. Арнольда не получила развития в школьных учебниках, но ознакомление с этим подходом к определению понятия «степень с рациональным показателем» может вызвать интерес у учащихся.

(Более подробно см. в: [1, с.40]).

В действующих учебниках имеет место другой подход к получению схематической записи определения степени с рациональным показателем.

Проводим рассуждения исходя из конкретных примеров.

Пусть $2^{\frac{1}{2}} = x.$ Сохраняя основное свойство степени, запишем:

$a)$ $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ (по ранее известному определению).

С другой стороны:

$$2^{\frac{1}{2}} > 0,\ 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^2.$$

Итак, $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ (по определению арифметического кв. корня). Получим $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

б) Пусть $2^{\frac{2}{3}} = x;\ 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2.$

С другой стороны $x^3 = 2^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^2}$. Получим $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Обобщая эти примеры, можно схематически записать:

$$(*)\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ \frac{m}{n} - \textit{дробь},\ m - \textit{целое}, n - \textit{натуральное},\ a > 0$$

Формулу (*) принимаем за определение степени с рациональным показателем. Еще раз подчеркнем, что основание степени $a > 0$.

Замечание

$0^{\frac{m}{n}} = 0,$ если $\frac{m}{n}$ - дробь, $\frac{m}{n} > 0,\ n \in N, m \in Z.$

$(-2)^{\frac{3}{4}},\ (-8)^{-\frac{1}{3}},\ 0^{-\frac{1}{2}}$ - не имеют смысла.

Но принятое определение имеет один недостаток – рациональное число можно записать разными способами.

Возьмем рациональное число $\frac{1}{2}$. Это число можно записать бесконечным множеством способов. Однако этот недостаток определения в действительности является несущественным.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \cdots$, значит $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{6}} = \ldots = \sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3}$.

Итак, определение математически корректно, т.е равенством (*) задает одно и то же число, независимо от того, как записано рациональное число r в виде дроби $\frac{m}{n}$.

Следовательно, мы принимаем соотношение (*) за определение степени с рациональным показателем, причем основание a всегда считается положительным.

Пример. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};\ 7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$.

Введенное определение оказалось удачным, так как в нем сохранились все привычные свойства степеней, которые были доказаны для натуральных показателей.

На практике предпочитают заменять радикалы степенями с дробными показателями.

$$\sqrt[8]{x^3} = \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{11}{12}} = x^{\frac{9+22}{24}} = x\frac{31}{24} = \sqrt[24]{x^{31}}.$$

Вычислить: $1)\, 64^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$ èëè $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2;$

$2)\, 27^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$ èëè $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{\left(3^2\right)^2} = \sqrt[3]{\left(3^2\right)^3} = 3^2 = 9;$ $3)\ 0^{\frac{51}{4}} = \sqrt[4]{0^{51}} = 0;$

4) $(-8)^{\frac{1}{3}}$. Это задание некорректно, так как нет определения степени с дробным показателем для отрицательного основания.

$(-8)^{\frac{1}{3}}$ не имеет смысла.

Еще раз проверим, не дает ли противоречий новое определение?

1) Возражения?! $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$?

Если согласиться с этим, то мы сталкиваемся с противоречиями.

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2,$$

$$-2 = 2?$$

2) По определению степени с рациональным показателем получили:

$$a)\ 2^{\frac{4}{2}} = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4,\ \text{à ðàíüøå}\quad 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4;$$

$$\acute{a})\ 2^{-\frac{4}{2}} = \sqrt{2^{-4}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4},\ \text{à ðàíüøå}\quad 2^{-\frac{4}{2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

Результаты не изменились.

Список литературы:

1. *Арнольд И.В.* Логарифмы в курсе элементарной алгебры./ И.В. Арнольд М-Л., 1949.
2. *Ашкинузе В.Г.* Алгебра и элементарные функции: пособие для старш.кл. ср. шк. /В.Г. Ашкинузе, Н.Н. Шоластер. -М.: Просвещение, 1964.
3. *Великанов Ю.Б.* Развитие функциональной линии при изучении показательной функции в X кл. /Ю.Б. Великанов, Е.Г. Глаголева //Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в ср.шк. /сост. Е.Г. Глаголева, О.С. Ивашов-Мусатов. – М.: Просвещение, 1981.
4. *Епишева О.Б.* Общая методика преподавания математики в средней школе: курс лекций: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / – Тобольск: Изд-во. ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 1997. – 191 с.
5. *Епишева О.Б.* Специальная методика обучения арифметике, алгебре и началам анализа в средней школе / О.Б. Епишева. –Тобольск.: Изд-во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2000.
6. *Методика* преподавания математики в средней школе. Частные методики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов /Ю.М. Колягин и др. -М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
7. *Методика* преподавания математики в средней школе: Частные методики: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. по физ.-мат. спец. /А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
8. *Методика* преподавания математики: пособие для учителя математики 8-10 кл. ср.школы /под общ.ред. С.Е. Ляпина. Л., 1956.

9. *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры / С.И. Новоселов. -М., 1965. - С.144, 435.
10. *Учебники* для учащихся по алгебре и началам анализа разных авторов.

Задания для самостоятельной работы

1. Изучите материал лекции и в соответствующие разделы школьных учебников по алгебре и началам анализа, учебно-методическую литературу и подготовьте ответы на следующие вопросы.

1.1. Назовите способ определения понятий «степень с нулевым показателем», «степень с отрицательным показателем», «степень с рациональным показателем».

1.2. Какой принцип используется при обобщении понятия степень. Покажите примеры реализации этого принципа при изучении в школе числовых множеств, при изучении вопросов геометрии (тема: «Движения в курсе планиметрии»).

1.3. Что существенно меняется в каждом новом определении степени при изменении показателя от натурального до любого действительного числа.

2. Разработайте методику изложения материала «Понятие степени с иррациональным показателем».

Методические рекомендации:

2.1. Разработайте проблемную ситуацию.

2.2. Рассмотрите графики функций, моделями которых являются выражения вида $y = a^x$, где $x \in Q$.

2.3. Выделите общие свойства построенных графиков функций.

2.4. Повторите те требования, которые были предъявлены к определению степени с нулевым, целым отрицательным, рациональным показателями.

2.5. Какие свойства степени нужно сохранить, чтобы определить степень a^α, где α – иррациональное число.

2.6. Рассмотрите конкретные примеры при вычислении значения выражений $2^{\sqrt{3}}, 2^{\sqrt{2}}$.

2.7.Сформулируйте математическое предложение, утверждающее существование и единственность выражения a^α для любого действительного числа α.

2.8. Подготовьте соответствующие презентации, помогающие организовать мыслительную деятельность учащихся в поисках определения степени с любым действительным показателем.

2.9. Поставьте проблемный вопрос: определение какой функции предваряет проделанная работа?

3. Решите упражнение

3.1. Представьте степень с рациональным показателем в виде корня:

$а)\ 8^{\frac{2}{3}};\ б)\ 5^{-\frac{3}{4}};\ в)\ 7^{-0,25};\ г)\ x^{\frac{3}{4}};\ д)\ a^{1,2};\ е)\ 6^{\frac{1}{2}};\ ж)\ 5^{\frac{3}{4}};\ з)\ 12^{-\frac{1}{3}};\ и)\ a^{0,5};\ к)\ (x-a)^{\frac{2}{3}}.$

3.2. Представьте арифметический корень в виде степени с дробным показателем: $à)\ \sqrt{1{,}3};\ á)\ \sqrt[3]{2{,}5^2};\ â)\ \sqrt[4]{\frac{2}{3}};\ ã)\ \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}};\ ä)\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}};\ å)\ \sqrt[3]{a^2-b^2};\ æ)\ \sqrt{5};\ ç)\ \sqrt[8]{16b^4};\ è)\ \sqrt[6]{a^{-2}}.$

3.3. Вычислить: $à)\ 49^{\frac{1}{2}};\ á)\ 4^{-\frac{1}{2}};\ â)\ 0{,}008^{-1\frac{1}{3}};\ ã)\ 16^{\frac{1}{2}};\ ä)\ 7\cdot 81^{\frac{1}{4}};\ å)\ 25^{-\frac{1}{2}}.$

3.4. Найти область определения функции: $y = x^{\frac{4}{9}}$.

3.5. Решить уравнение: $a)\ x^{\frac{1}{2}}=5;\ á)\ x^{\frac{1}{3}}=3;\ â)\ (x+3)^{\frac{1}{4}}=0;\ ã)\ (x^2-16)^{0,5}=3;\ ä)\ \sqrt[6]{\sqrt[x]{9}}=3;$ $å)\ x^{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)}=1;\ æ)\ \sqrt[3]{x^2}=1;\ ç)\ x^{\frac{2}{3}}=1;\ è)\ x^{-\frac{2}{3}}-2\cdot x^{-\frac{1}{3}}-8=0;\ ê)\ x^{\frac{2}{3}}=12-x.$

3.6. Построить график: $а)\ y=(x+4)^{\frac{1}{2}};\ б)\ y=(x+4)^{\frac{1}{2}}-5.$

3.7. Разложить на множители: $a)\ a-4a^{\frac{1}{2}};\ á)\ \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-9;\ â)\ b^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{4}}.$

3.8. Сократить дробь $\dfrac{a+6a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+6}$.

3.9. Найти значение выражения $\dfrac{y-49y^{0,5}}{y^{0,75}+7y^{0,5}}$, если $y=2{,}25$.

3.10. Имеет ли смысл выражение? $5^{\frac{4}{3}}, (-16)^{\frac{2}{3}}, 0^{\frac{3}{4}}, (-25)^{-\frac{1}{2}}, 0^{-\frac{4}{5}}.$

3.11. Укажите допустимые значения переменной в выражениях:

$x^{\frac{1}{2}}, (y-1)^{\frac{1}{3}}, (a+2)^{\frac{3}{5}}.$

3.12. Какое из трех решений является верным? Объяснить характер ошибок в других решениях. $\left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2;\ \left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=(-2)^1=-2;\ \left((-2)^2\right)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{4}=\pm 2.$

3.13. Установить, при каких значениях x верны следующие преобразования

$$\left(x^2-2x+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2-1\right)^{-1}=(1-x):\left(x^2-1\right)=-(x+1)^{-1}.$$

3.14. Найти значение выражения:

$$A=\frac{\sqrt[4]{a}\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[12]{b^7}\cdot\sqrt[4]{ab^{-1}}}\cdot\left(\frac{a^{-\frac{3}{8}}}{b^{-\frac{2}{3}}}\right),\ \text{если } a=2{,}5,\ b=20.$$

4. Выяснить характер ошибок учащихся при работе с определением понятия «степень» и причины этих ошибок.

Рекомендация: см. [6, 33].

ЛЕКЦИЯ 4. ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

План

1. Логическое строение геометрии.
2. Возможные методические подходы к построению школьного курса геометрии.
3. Основные этапы изучения геометрии в школе.
4. Первые уроки систематического курса геометрии.

Особенность геометрии состоит в том, что в ней
самая строгая логика соединена с наглядным представлением.
С одной стороны – логика, с другой – наглядность.
А.Д. Александров

Что такое геометрия? Это наука о геометрических фигурах и их свойствах. Она возникла из практической деятельности людей.
В переводе с греческого «геометрия» означает «землемерие».

Цель лекции – показать особенности построения геометрии как науки и основные подходы к построению школьного курса геометрии.

1. Логическое строение геометрии

Геометрия – дедуктивная наука, так как в основу ее построения положен аксиоматический метод.

Как строится геометрия?

1) Выделяется небольшое число основных, первоначальных, т. е. неопределяемых понятий. Другие понятия последовательно определяются через основные (например, отрезком называется часть *прямой*, ограниченная двумя *точками*).
2) Все утверждения формулируются при помощи основных понятий и понятий, уже получивших определение.
3) Выделяется небольшое число утверждений (аксиом), *принимаемых* без доказательства. Эти утверждения описывают свойства основных понятий и связи между ними. Все остальные утверждения последовательно доказываются в качестве теорем.

Построение математической научной теории предполагает выделение конечной системы аксиом, обладающей свойствами непротиворечивости, полноты и независимости. Важный элемент в понимании структуры дедуктивных теорий – это известная *свобода выбора системы аксиом и основных понятий.* Аксиомы не есть «очевидные истины, не требующие доказательства». Одно и то же утверждение в рамках одной системы – аксиома, в рамках другой – теорема.

Пример. Вместо аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» можно доказать как теорему (з*адание* №1 *для самостоятельной работы*).

Основные понятия и аксиомы – это фундамент для построения геометрии. От того, какие понятия приняты за основные и какие предложения приняты за аксиомы, зависит ее содержание. Известны геометрии Евклида, Римана, Гильберта, Лобачевского. Школьный курс геометрии построен на геометрии Евклида. В качестве аксиом Евклид выбрал такие предложения (постулаты), которые, как он считал, можно непосредственно проверить простейшими инструментами. Его руководство по математике («Начала» – III в. до н.э.) представляет первый систематический курс геометрии, в котором логические операции сочетаются с конструктивными, – это и есть методологический принцип Евклида. Именно на этих принципах и строится школьный курс геометрии.

Таким образом, геометрия – дедуктивная наука, и школьный курс геометрии отражает это. Но в школьном курсе никогда не существовало геометрии, удовлетворяющей третьему требованию. Это просто невыполнимо. Невозможно осуществить строгое логическое построение геометрии в школе, но именно в этом курсе учащиеся должны получить наиболее полные представления о дедуктивных теориях. Чтобы снять это противоречие, необходимо искать компромиссы при построении школьного курса геометрии, а именно:

- не всем понятиям давать определения. Часть из них должна опираться на опыт и интуицию учащихся;
- часть понятий вообще следует опускать;
- не все свойства необходимо формулировать и, тем более, доказывать.

Однако в целом дедуктивный характер школьного курса геометрии сохраняется. И показать это учащимся – задача учителя.

Итак, в школьном курсе геометрии есть основные понятия, есть система аксиом, есть стремление обосновывать любое суждение на основе имеющихся утверждений.

***Задание* №1 *для самостоятельной работы*.**

1. Сравните основные понятия геометрии Д. Гильберта и геометрии А.Н. Колмогорова.
2. Докажите, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной, приняв за аксиому утверждение, что сумма углов треугольника равна 180°.
3. Сравните аксиоматики (в том числе стереометрии) А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна.

2. Возможные методические подходы к построению школьного курса геометрии

Как же строится школьный курс геометрии? Надо отметить, что именно геометрия претерпевает наибольшие изменения в результате реформ и преобразований. Постоянно ведутся дискуссии по вопросам качества учебников. Одним из основных методов построения школьного курса геометрии является аксиоматический метод. Идея аксиоматического построения геометрии была предложена, как уже было отмечено выше, и реализована Евклидом. Она состоит в том, что если мы не можем определить, что представляет собой исследуемый объект, то следует определить его свойства. Выделить существенное и абстрагироваться от несущественного (вместо того, чтобы говорить о том, что такое точка, прямая, плоскость, можно говорить о свойствах, которыми они обладают). Аксиомы позволяют лучше понять основания геометрии. Наличие аксиом (определенных правил) должно подкрепляться соответствующими интуитивными представлениями. Отсутствие сформулированных в том или ином учебнике аксиом на самом деле означает, что аксиомы просто не выделены. Все равно какие-то свойства приходится принимать без доказательства.

Одной из проблем построения школьного курса геометрии является выбор такой аксиоматики, которая была бы пригодна для первоначального изучения геометрии.

Проблема в том, что содержание школьного курса геометрии должно соответствовать уровню развития современной геометрии и одновременно быть доступно для усвоения учащихся. Где есть проблема, там есть варианты ее решения, там есть развитие методики.

Итак, основные идеи и периоды в развитии методики преподавания геометрии в школе.

1. Конец XIX – начало XX в. Все преподавание должно быть основано на решении задач, а не на объяснениях теории учителем или изучении текста учебника. Учащиеся являются не только *свидетелями* математических открытий, но и *активными участниками* самого процесса открытия. Теория появляется в процессе решения задач. Эти идеи реализованы в учебниках математики того периода (напр., С.И. Шохор-Троцкий «Геометрия на задачах»), в современных учебниках часть теоретических знаний тоже выводится в процессе решения задач. Такой индуктивный метод изучения используется и сейчас в проблемном изложении.
Н.А. Извольский (то же время) подчеркивал роль логической структуры курса геометрии для сознательного усвоения. Логика в курсе геометрии, по мнению Н.А. Извольского, должна проявляться двояко: 1) в плане построения курса и 2) в силлогизмах, служащих для доказательства теорем. Наибольшее значение имеет первое проявление логики. Однако невозможно построить полностью строго логический школьный курс геометрии.

2. Период использования в школе учебников А.П. Киселева, в которых курс геометрии строился на неполной системе аксиом (1-е издание – в 1893 г., последующие – вплоть до начала 60-х гг. XX в.). Теоретической основой учебника А.П. Киселева были «Начала» Евклида, которые сочетали в себе наглядность и убедительность. Сложные в теоретическом плане вопросы обоснования взаимного расположения фигур («лежать между») решались на основе наглядности; существование фигур – на основе построения; равенство фигур – на основе интуитивно ясного понятия совмещения (как совмещения физических объектов). Основные теоретические знания при доказательстве теорем и решении задач – признаки равенства и подобия треугольников. В процессе дедуктивных рассуждений приходилось прибегать к интуитивным представлениям, так как система аксиом была неполной, школьный курс геометрии строился частично на интуитивной основе и на основе наглядных представлений. Учебник А.П. Киселева отличался единством формы и содержания, согласованностью содержания и методического изложения. Теория и применяемые в ней методы органически сочетались с набором задач, которые рождались вместе с теорией и вместе с ней развивались. Одни и те же методы доказательства теорем и решения задач обеспечивали дидакти-

ское единство курса. Чем лучше усваивались доказательства, тем успешнее решались задачи и наоборот: решение задач способствовало доказательству теорем. Этот учебник может выступать камертоном: очень часто при анализе учебников по геометрии методисты сравнивают их с учебником А.П. Киселева.
(*Подробнее об учебнике А.П. Киселева см.* [2.6, с.395-404]).
3. Период внедрения в школьный курс геометрии новых разделов (60-е годы): элементов теории множеств, геометрических преобразований, векторной алгебры и т.д. (В.Г. Болтянский, А.И. Фетисов, И.М. Яглом и др.) [2.4].
4. «Колмогоровский» период (1965 – 1980 гг.) характеризуется осмыслением всей структуры школьной математики в целом и геометрии в частности: 1) А.Н. Колмогоров прежде всего хотел «навести порядок» с *единым* математическим языком и системой обозначений в геометрии. С этой целью был предложен теоретико-множественный подход к изложению курса (язык + символика: множество, элемент множества, пересечение, объединение множеств; геометрическая фигура – множество точек; обозначения – отрезок $[AB]$, длина отрезка $|AB|$).
2) Общее единство курсу математики придавал функциональный подход. Все изложение – на основе геометрических преобразований. (Преобразование – как отображение плоскости на себя, преобразование множества точек плоскости).
3) Курс геометрии строился на основе аксиоматики, состоящей из 12 аксиом, однако не являлся строго аксиоматическим, потому что полный список аксиом появлялся лишь в конце планиметрии.

Курс планиметрии и идейно подчиненный ему курс стереометрии З.А. Скопеца [3.6] нельзя рассматривать в отрыве от общей концепции А.Н. Колмогорова о построении школьного курса математики в целом. Во многом Колмогорову удалось упростить геометрические доказательства, но в его учебнике теоретико-множественный аппарат затмил геометрическое содержание. Значительное время уходило на его усвоение и незначительное – на решение содержательных геометрических задач.

Безусловно, этот период имеет большое значение для развития теории и методики обучения геометрии в средней школе. Однако геометрия А.Н. Колмогорова оказалась трудной для учащихся, перегруженной теорией, которая усваивалась далеко не всеми учениками.
5. Период современных учебников для массовой школы (Л.С. Атанасян и др.; А.В. Погорелов; И.Ф. Шарыгин; А.Д. Александров и др.). Появление этих учебников было связано с желанием авторов вернуться к более традиционному (чем у А.Н. Колмогорова) подходу к изучению школьного курса геометрии (80-е годы и т.д.):
а) геометрия А.В. Погорелова выстроена строго дедуктивно. Все аксиомы объявлены с самого начала как известные свойства геометрических фигур. Раскрыто, что такое «доказательство» (рассуждение, цель которого – установить истину на основе аксиом, определений, теорем – об этом подробнее позднее); главное – научить учащихся рассуждать, анализировать, доказывать, то есть геометрия рассматривается как средство развития мышления учащихся;

б) в геометрии Л.С. Атанасяна аксиомы вводятся постепенно и формулируются не все, необходимые для построения планиметрии, хотя некоторые и используются при изложении курса. В приложении к курсу [3.3, с. 344] приводятся все аксиомы. Значительно усилена практическая направленность курса (развитие умений и навыков плюс доступность изложения).

Но перед авторами этих учебников встала проблема, связанная с внедрением в систему образования дифференцированных методов обучения. Оказалось, что для современной школы нужна не только достаточно четкая и строгая система изложения геометрических знаний, но и мотивация учения, учет индивидуальных особенностей и способностей учащихся, связь с окружающим миром, эстетическое воспитание и т.д.

В настоящее время эти авторские коллективы адаптировали свои учебники к современным условиям [3.3; 3.9] (*задание* № 2 *для самостоятельной работы*).

6. В течение последних десяти лет возникли новые проблемы: определить уровни и профили обучения, понять соотношение влияния математических знаний на развитие личности человека и мн. др. Это привело к появлению достаточно большого количества новых *авторских проектов* (А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот; В.А. Гусев; В.А. Смирнов, И.М. Смирнова и др.).

«Говоря о роли геометрических знаний в формировании логических рассуждений, в развитии дедуктивного мышления, следует помнить о наглядности изучаемого материала, о практической и теоретической целесообразности его изучения… Логика выступает как средство подтверждения наглядности и практической значимости, а не наоборот. Вместе с тем … логика составляет основу рассуждений и практических действий» [2.3, с. 267]. Таким образом, преподавание геометрии в школе должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление и практическое применение.

Итак, подходы к построению различные, но задачи, стоящие перед школьным курсом геометрии, одни и те же. Это изучение базовых геометрических понятий, формирование практических умений и навыков, развитие логического мышления, развитие пространственного воображения. Надо научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать. Немногие станут математиками, однако всем придется рассуждать, анализировать, доказывать. Наиболее эффективным средством для развития пространственных представлений у учащихся является использование наглядности (окружение, модели и т.д.). Геометрия – это инструмент развития интеллектуальной сферы ученика.

Задание №2 для самостоятельной работы.

1. Сравните учебники геометрии для 7–9 кл. А.В. Погорелова 2000 г. и 2004 г. (оформление, структура, рекомендации для учащихся [3.9, с.25, 35], стереометрия).
2. Сравните учебники геометрии для 7–9 кл. Л.С. Атанасяна 2000 г. и 2005 г.

3. Основные этапы изучения геометрии в школе

Можно выделить четыре этапа изучения геометрии в школе: начальная школа, 5 – 6 классы, 7 – 9 классы (основная школа), 10 – 11 классы. Каждый этап имеет свои задачи.

На первых двух этапах происходит *накопление* и развитие начальных геометрических представлений у учащихся; *знакомство* с некоторыми геометрическими понятиями; *овладение* элементарными навыками использования простейших чертежных и измерительных инструментов (линейка, циркуль, транспортир), это достигается в процессе практических работ. Основная роль отводится вырезанию и вычерчиванию фигур, получению фигур путем перегибания листа бумаги, упражнениям в распознавании фигур на чертежах и в окружающей обстановке, простейшим измерительным работам в классе и на местности. Называя треугольник, прямоугольник, учащиеся не дают им определений. Более того, для выделения этих фигур из числа других они называют избыточные свойства. Общие геометрические положения возникают как обобщение опыта, а не в виде теорем, подлежащих доказательству.

Обучение на втором этапе готовит учащихся к восприятию первых разделов систематического курса геометрии. Расширяется круг изучаемых геометрических фигур, для некоторых понятий даются определения (разные учебники), проводятся рассуждения.

Первые два этапа – это пропедевтика. Это время, когда у детей наиболее развито образное мышление. Мы живем в трехмерном пространстве, поэтому естественней воспринимается параллельность и перпендикулярность прямых в пространстве, а не на плоскости (на различных моделях, реальных объектах). Учитель вводит ребенка в мир геометрии на основе рассмотрения окружающего мира (другого пути нет). При этом необходимо учить детей при восприятии конкретных предметов выделять и абстрагировать их геометрические свойства, создавать геометрические образы. Именно они являются основой геометрических понятий.

Таким образом, основная цель подготовительного этапа – в его названии: подготовка учащихся к сознательному усвоению систематического курса геометрии.

Третий этап – систематический курс планиметрии. Основные содержательные линии курса: геометрические фигуры (их построение, свойства) на плоскости и скалярные величины (длина, мера угла, площадь).

Четвертый этап – систематический курс стереометрии (геометрические фигуры и их свойства в пространстве).

4. Первые уроки систематического курса геометрии

Особые трудности вызывают первые уроки систематического курса планиметрии. Появляется новый предмет с большим количеством новых понятий, терминов, новой символики, новым содержанием задачного материала, резким повышением уровня строгости логических рассуждений. Основное учебное назначение первых уроков – сформировать у учащихся первоначальное представление о стиле мышления в геометрии, о характере геометрических доказательств и положить начало выработке соответствующих умений. Учащиеся должны понимать, что все утверждения, не являющиеся аксиомами, необходимо доказывать, не ссылаясь на очевидность. Конечно, сущность аксиоматического метода объяснять семиклассникам рано. По мере изучения геометрии они постепенно будут проникаться идеей ее дедуктивного построения.

Методика *первых уроков*, первых разделов геометрии предполагает *постепенный переход* от конкретного к общему, *постоянное обращение* к наглядности, к окружающей действительности. С самых первых шагов изучения геометрии учителю необходимо иллюстрировать свой рассказ, текст учебника, записи на доске и в тетрадях рисунками. Итак, логика и наглядность. Что мы имеем в виду, говоря о первых уроках геометрии? Это *введение в геометрию*, *первые понятия*, *аксиомы* (не обязательно сразу называть аксиомой), *первые теоремы*, *первые задачи*.

Введение в геометрию. Надо сказать, что начальная школа в настоящее время работает по учебникам достаточно широкого спектра, которые предусматривают определенное знакомство учащихся с элементами геометрических знаний, умений и представлений учащихся. Вторая ступень тоже вносит определенный вклад в геометрические представления учащихся. Поэтому учителю математики, пришедшему в 7-й класс, следует все это учитывать.

Итак, первый урок. Что важно сказать учащимся?

- Что такое геометрия?
- Как она появилась?
- Как развивалась?
- Чем будем заниматься?

У каждого учителя свои слова, свои эмоции.

Понятия. Сравним учебники геометрии А.В. Погорелова [3.9] и Л.С. Атанасяна [3.3].

Геометрические понятия *точка* и *прямая*, с которых начинается изучение систематического курса планиметрии, уже знакомы учащимся из пропедевтического курса.

А.В. Погорелов. Геометрия 7-9	**Л.С. Атанасян**. Геометрия 7-9
Автор называет их основными фигурами геометрии.	Включает в текст без всякого указания (во введении – в числе других).
Вопрос о взаимном расположении прямых и точек на плоскости рассматривается сразу после рассмотрения основных понятий.	
Для этого рассматриваются отношение принадлежности и отношение порядка, а также величины: длина отрезка и градусная мера угла.	Отношение принадлежности, лежать между, понятие наложения.
Раскрывает свойства основных понятий в аксиомах (сначала не объявляя, что это *аксиомы*).	Включает в текст.

На первых уроках вводятся такие понятия, как «отрезок», «луч» (полупрямая), «угол», которым дается формально-логическое определение. Формирование умения определять понятие осуществляется на протяжении всего курса обучения, так как в каждой теме появляются новые особенности и трудности.

Когда и как учащиеся знакомятся с тем, что такое *определение* понятия, *аксиома*, *теорема*?

А.В. Погорелов. Геометрия 7-9	**Л.С. Атанасян**. Геометрия 7-9
С. 15. Конец первого параграфа «основные свойства простейших геометрических фигур». Дать **определение** чему-либо – значит объяснить, что это такое.	С.43.Четвертый параграф «Задачи на построение». Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется **определением** (определение окружности).
С. 14. Пункт «Аксиомы». Утверждения, содержащиеся в формулировках основных свойств простейших фигур, не доказываются и называются **аксиомами**.	С. 59. Об аксиомах геометрии. Некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и строится вся геометрия. Такие исходные положения называются **аксиомами**.
Вводятся аксиомы как основные свойства фигур и отношений.	Некоторые аксиомы были сформулированы в первой главе (хотя не назывались аксиомами).
Рекомендуемая работа над аксиомой: 1) иллюстрация примерами из жизни, на моделях; 2) формулировка аксиомы; 3) иллюстрация аксиомы на рисунках; 4) краткая (символическая) запись; 5) использование в рассуждениях.	–
Теорема. С. 13. Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения. Это рассуждение называется **доказательством**. А само утверждение, которое доказывается, называется **теоремой**. С.14. Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется **условием** теоремы. В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется **заключением** теоремы.	С. 29. Первый признак равенства треугольников (уже вторая теорема, первая – о вертикальных углах без термина «теорема»). В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется **теоремой**, а сами рассуждения называются **доказательством теоремы**. С. 63. Во всякой теореме различают две части: условие и заключение. Условие теоремы – это то, что дано, а заключение – то, что требуется дока-

Сразу дается пример рассуждения.	зать.
Метод доказательства от противного, с. 24. (на примере доказательства теоремы «Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну»).	С. 63 (на примере доказательства теоремы «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны»).
Обратная теорема, с. 32 (дается разъяснение, что такое обратная теорема). Теорема (свойство углов равнобедренного треугольника). Обратная теорема (признак равнобедренного треугольника).	С. 63. Три признака параллельности двух прямых (доказаны ранее). Теоремы, обратные им — на странице 63.

На первых уроках происходит обучение учащихся доказательствам. В числе первых методов дается метод доказательства от противного. В процессе доказательства этим методом необходимо выделить все его этапы:

1) предположить, что истинно предложение, противоположное заключению теоремы;

2) в результате рассуждений получить противоречие известному истинному предложению или тому, что дано;

3) сделать вывод о том, что предположение неверно;

4) сделать общий вывод [2.6, с.261].

Учитель должен знать, что в рассуждении методом от противного используется логический закон «исключенного третьего» (напр., две прямые пересекаются или **не** пересекаются, третьего случая быть не может).

Задачи.

В усвоении первых *понятий*, *аксиом*, *теорем* большую роль играют практические задания и задачи, сопровождаемые рисунками.

Практические задания [3.9, с.16]:

а) Отметить точки, принадлежащие прямой и не принадлежащие ей;

б) Проверить, будут ли названные точки лежать на данной прямой (или прямая проходит через эти точки). Наиболее трудный вариант представлен на рис. 1.

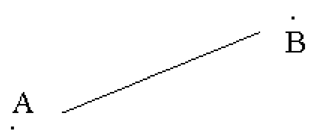


Рис. 1

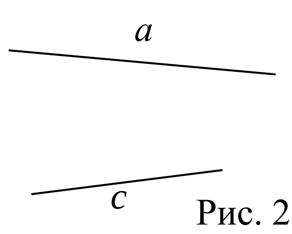


Рис. 2

в) Пересекаются ли прямые a и c на рис. 2?

г) Построить прямые, пересекающиеся в данной точке.

В систему упражнений целесообразно включать предложения с пропущенными словами. Например: прямая a … через точку A; точка B … прямой b; прямые a и b … в точке O и т.п.

Продолжим сравнение учебников, анализируя *задачи на доказательство и на построение.*

А.В. Погорелов. Геометрия 7-9	**Л.С. Атанасян**. Геометрия 7-9
Обучение рассуждению осуществляется посредством задач на доказательство, которые включены в текст учебного материала (с. 4, 6). Это задания типа: «Объясните ответ».	В тексте учебного материала задач нет, среди предложенного набора задач есть задачи с решением (с. 17, 67).
С. 58. Что такое задача на построение (не выделены этапы). Основные задачи на построение. С. 61. Метод геометрических мест.	С. 43. Понятие задачи на построение. Основные задачи. С. 95. Схема решения задачи на построение.

Следует помнить о различных *функциях* задач: многие факты (интересные и полезные для дальнейшего решения) мы получаем в процессе решения задач.

Вопрос о *взаимном расположении прямых* изучается одним из первых в систематическом курсе планиметрии. И это не случайно. Параллельность и перпендикулярность на плоскости и в пространстве – один из важнейших вопросов курса геометрии, так как без знания этих отношений невозможно изучение свойств фигур, познание окружающего мира. Именно при изучении параллельности вводится новый метод доказательства (косвенное доказательство – от противного), рассматривается история геометрии как науки. Можно привести примеры неевклидовых геометрий.

В имеющейся учебно-методической литературе по геометрии представлена различная последовательность изучения разделов о параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости. Какова бы ни была последовательность изучения, логическая структура раздела должна содержать:

- определение,
- существование (построение),
- свойства,
- признаки,
- применение к решению задач.

Большое значение для последовательности изучения разделов, а особенно для решения задач, имеют вопросы взаимосвязи параллельности и перпендикулярности. Взаимосвязь может быть раскрыта в процессе решения следующих задач на доказательство.

1. Доказать, что два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны.

2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к данной прямой, то другая также перпендикулярна к этой прямой.

В учебнике Л.С. Атанасяна параллельность двух перпендикуляров к прямой на плоскости устанавливается уже в одном из первых пунктов учебника (с. 23) на основе перегибания рисунка. Этот факт не выделен в качестве *теоремы* существования параллельных прямых. Однако он используется для доказательства признака параллельности прямых при условии равенства накрест лежащих углов (с. 55-56). Поэтому учителю следует аккуратно обосновывать принадлежность трех точек одной прямой (в тексте учебника это точки H, O, H_1), обратить внимание на неполноту доказательства (согласно методу полной индукции нет третьего случая – для тупых накрест лежащих углов), нет внешних накрест лежащих углов.

Задание №3 для самостоятельной работы.

1. Проведите сравнительный анализ последовательности изучения разделов о параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости в различных школьных учебниках.
2. Докажите, что геометрия – дедуктивная наука, используя следующие утверждения: «аксиоматический метод – метод (способ) построения научной теории», «построение какой-либо дисциплины аксиоматическим методом называют дедуктивным».

Некоторые методические рекомендации к первым урокам геометрии

1. Надо учитывать, что вначале учащиеся, побуждаемые обосновывать то, что и «так видно», и не имеющие достаточного опыта в логических рассуждениях, будут испытывать определенные трудности. Для убеждения учащихся учителю целесообразно показать геометрические иллюзии (рис.3, 4а и 4б), примеры объяснений, доказательств.
2. Давая образцы правильных рассуждений, не следует сразу же предъявлять слишком высокие требования к ответам учащихся. Необходима постоянная помощь учителя.
3. Для того чтобы облегчить учащимся запоминание формулировок, целесообразно заготовить таблицы с текстами аксиом, определений и вывешивать их по мере надобности, а также использовать тетради с печатной основой.
4. Необходимо обратить внимание на выяснение смысла и отработку специфических речевых оборотов, таких как «одна и только одна», «любые две», «найдется» и т.д., используемых в формулировках аксиом.
5. Следует иметь в виду, что аксиоматики адресованы учителю (в первую очередь) и любознательному ученику на завершающем этапе изучения геометрии.
6. Не следует забывать, что в основе преподавания геометрии лежат логика, наглядность и интуиция.

а) Какой отрезок длиннее?

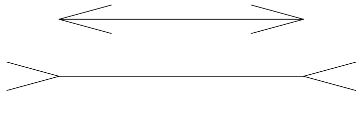


Рис. 3

б) 65=64 ?

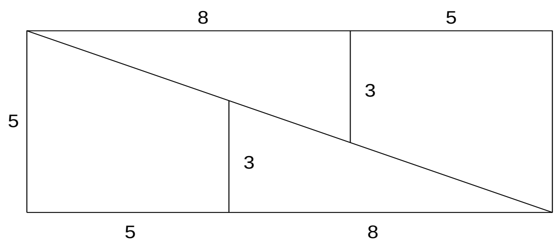


Рис. 4а

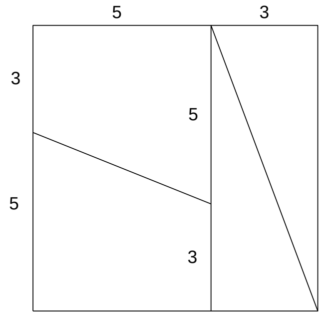


Рис. 4б

Таким образом, оптимальное соотношение интуитивно-наглядного и логического в преподавании, необходимость построения дедуктивной теории и формирование соответствующего уровня логического мышления, развитие пространственного воображения, современные научные знания и возможности учащихся в их усвоении – проблемы школьного курса геометрии.

Список литературы

1. Нормативные документы:

1.1. *Программы* общеобразовательных учреждений. Геометрия. 7-9 классы/сост. Т.А.Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2009.

1.2. www.edu.ru – Российское образование. Федеральный портал. Государственный образовательный стандарт основного общего образования по математике.

2. Методики:

2.1. *Виноградова Л.В.* Методика преподавания математики в средней школе/ Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: «Феникс», 2005.

2.2. *Методика* и технология обучения математике. Курс лекций / под. ред. Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.

2.3. *Методика* обучения геометрии: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений/В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А., В.А. Панчищина и др./под ред. В.А. Гусева. – М.: Академия, 2004.

2.4. *Методика* преподавания геометрии в старших классах средней школы / под ред. А.И. Фетисова. – М.: Просвещение, 1967.

2.5. *Методика* преподавания математики в средней школе. Частные методики / Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 1977. – С. 146 – 188.

2.6. *Методика* преподавания математики в средней школе. Частная методика / сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – Гл. 12, 16.

3. Учебники и учебные пособия для учащихся:

3.1. *Александров А.Д.* Геометрия: учеб. для 7-9 кл./А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2008.

3.2. *Бевз Г.П.* Геометрия: учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений/Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владимирова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994.

3.3. *Геометрия* 7 – 9: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2005.

3.4. *Дышинский Е.А.* Геометрия треугольника и окружности: Факультативный курс по математике для уч-ся 10 – 11 классов/ Е.А. Дышинский; Перм. гос. пед.ин-т. – Пермь, 1993.

3.5. *Киселев А.П.* Геометрия: Планиметрия. 7-9 кл.: учебник и задачник/А.П. Киселев, Н.А. Рыбкин. – М.: Дрофа, 1995.

3.6. *Клопский В.М.* Геометрия: учеб. пособие для 9-10 кл. сред. шк./В.М. Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский; под ред. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение, 1983.

3.7. *Колмогоров А.Н.* Геометрия: учеб. пособие для 6-8 кл. сред. школы/А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов; под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1981.

3.8. *Никитин Н.Н.* Геометрия: учеб. для 6-8 классов/Н.Н. Никитин. – М.: Просвещение, 1970.

3.9. *Погорелов А.В.* Геометрия: учеб. для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений/ А.В. Погорелов. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2004.

3.10. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учеб. зав./И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2002.

4. Пособия для учителя:

4.1. *Вернер А.Л.* Геометрия: кн. для учителя: метод. рекомендации к учеб. 7-9 кл./А.Л. Вернер, Л.П. Евстафьева, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2008.

4.2. *Изучение* геометрии в 7, 8, 9 классах: метод. рекомендации: кн. для учителя/ [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др.]. – М.: Просвещение, 2008.

4.3. *Карнацевич Л.С.* Изучение геометрии в 6-м классе: Из опыта работы/Л.С. Карнацевич, А.И. Грузин; под ред. И.Ф. Тесленко. – М.: Просвещение, 1983.

4.4. *Мельникова Н.Б.* Геометрия в 7 классе: пособие для учителей/Н.Б. Мельникова, Т.М. Мищенко, Л.Ю. Чернышева. – М.: Просвещение, 1984.

5. Периодическая печать («Квант», «Математика в школе», «Математика» – приложение к газете «1-е сентября»):

5.1. *Александров А.Д.* Диалектика геометрии/А.Д.Александров//Математика в школе. – 1986. – №1.

5.2. *Александров А.Д.* О геометрии/А.Д.Александров// Математика в школе. – 1980. – № 3.

5.3. *Перельман Я.И.* Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным?/Я.И. Перельман// Математика в школе. – 2008. – № 3. – С.71.

5.4. *Рыжик В.И.* Геометрия и практика/В.И. Рыжик//Математика в школе. – 2006. – № 6. – С. 9.

5.5. *Саранцев Г.И.* Перед встречей с доказательством/Г.И. Саранцев //Математика в школе. – 2004. – № 9. – С. 41.

5.6. *Смилга В.* Как начиналась геометрия/В. Смилга// Квант. – 1992. – № 2. – С. 11.

Методические рекомендации для организации самостоятельной работы студентов по теме «Изучение геометрии в основной школе»

1. Изучите стандарты основного общего образования, программу и учебники по геометрии для основной школы.

2. Подготовьте материал для исторической справки (с презентацией) о вкладе Фалеса Милетского, Пифагора, Платона, Евклида в развитие геометрии [5.6].
3. Выполните задания №№ 1 – 3 (в тексте лекции) для самостоятельной работы.

Индивидуальные задания:

1. Подготовьте вводное слово – *введение в геометрию*.
2. Разработайте методику формирования понятий: а) точка и прямая; б) угол.
3. Разработайте методику изучения основного свойства [3.9, с. 4 – 13]:
   а) I; б) II; в) III; г) IV; д) V; е) VI; ж) VII; з) VIII; и) IX.

<u>Рекомендации к выполнению заданий:</u>

– составьте системы подготовительных задач, продумайте методику их решения;
– используйте дидактические материалы для организации работы по усвоению аксиомы;
– подготовьте методический этюд с презентацией.

4. Подготовьте историческую справку о геометрии Н.И. Лобачевского (к свойству IX).
5. Разработайте методику изучения теоремы:
   а) $T_{1.1}$ [3.9, с.13]; б) $T_{2.2}$ [3.9, с. 22]; в) $T_{2.3}$ [3.9, с. 23].
6. Разработайте методику решения задачи:
   а) № 16 [3.9, с.17]; б) № 20 [3.9, с. 18]; в) № 26 [3.9, с. 18]; г) № 36 [3.9, с. 19]; д) № 18 [3.9, с. 27].

Приложение

А.Д. Александров

О геометрии

Кажется, общепризнано, что наше среднее образование страдает перегрузкой. Но даже постановления, обязывающие преодолеть эту болезнь, не ведут к радикальным результатам. Каждый специалист настаивает на том, что без его предмета, без таких-то и таких-то разделов обойтись никак невозможно. Но если спросят: почему? – то последует ответ: это невозможно никак, потому что никак невозможно... ибо образование и состоит в наполнении человека знаниями.

Однако, по более глубокому пониманию, цель среднего образования состоит в том, чтобы дать человеку основные практически нужные знания и развить его личность, развить духовно – в умственном и нравственном отношении (последнее и есть самое главное). Поэтому вопрос о нужности любого школьного предмета, о необходимости того или иного его раздела сводится к вопросу о его практической надобности и значении в развитии личности. И если этот вопрос поставить всерьез, то выяснится, что кое-что, а то и довольно многое можно исключить из программ без сожаления, а кое-что следовало бы и добавить. Только всерьез поставить и решить этот вопрос для каждого предмета не очень просто; потому его решение и заменяют простыми уверениями в надобности «своего» предмета.

Понимание того, что практически нужно в данном предмете и что в нем может служить развитию личности, должно определять и содержание предмета, и постановку его преподавания. В конечном счете, это понимание должно служить основой для решения всех вопросов преподавания.

Мы рассмотрим в этом плане курс геометрии, особенно стереометрии, и в первую очередь, с точки зрения его роли в развитии личности. Одним из результатов нашего рассмотрения будет вывод о том, что из программы стереометрии полезно исключить целых два раздела.

1. Противоречивая сущность геометрии

Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Воображение дает непосредственное видение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика в свою очередь придает точность воображению и направляет его к созданию картин, обнаруживающих нужные логике связи.

Это, несомненно, так, во всяком случае, для трехмерной евклидовой геометрии. Но в источнике и содержательном основании неевклидовой и многомерной геометрии тоже лежат наглядные представления, хотя бы обобщенные; без них любой раздел геометрии перестает быть собственно геометрией. Но мы будем говорить здесь не о всей геометрии, а о той ее части, которая изучается в школе, и при этом специально о стереометрии.

Именно в стереометрии указанная особенность геометрии выступает наиболее ярко. Во-первых, потому, что в ней требуется пространственное воображение. Факты планиметрии изображаются на доске и на бумаге в их подлинном виде (не считая того, что нельзя нарисовать бесконечную прямую без всякой толщины и т. п.). Но факты стереометрии изображаются условно и потому не могут быть верно восприняты без дополнительного пространственного представления. А оно составляет известную трудность, нередко значительную.

Во-вторых, стереометрия изучается в последних классах школы, когда учащиеся должны быть достаточно развиты для того, чтобы воспринять логику дедуктивного изложения. Поэтому курс стереометрии можно и следует строить с большей логической последовательностью и доказательностью, чем курс планиметрии.

Таким образом, мы с большим правом можем повторить о курсе стереометрии то, что было сказано о геометрии вообще. Стереометрия и должна быть преподана в соединении наглядности и логики, как живое пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Живое воображение, скорее, ближе искусству, сухая строгая логика – привилегия науки. Они, можно сказать, совершенные противоположности («лед и пламень не столь различны меж собой»). Однако геометрия их все же соединяет, и задачи преподавания – соединить их в одном учебном предмете.

Это есть реальное взаимопроникновение, единство противоположностей, противоречие в самой сущности предмета, которое не может быть разрешено иначе, как уничтожением самого предмета, т. е. ликвидацией курса геометрии, заменой его чем-то другим. Это противоречие составляет особую трудность, а вместе с этим и особую прелесть геометрии. Трудно сочетать столь противоположные свойства, как живость воображения и строгость мысли, но зато, когда их единство осуществляется, достигается большая ясность понимания и радость непосредственного «видения» истины.

В курсе геометрии соединяются еще две противоположности: абстрактная математическая геометрия и реальная геометрия – реальные пространственные отношения и свойства тел. Это противоречие выступает уже в тот момент, когда на доске «проводят прямую» и говорят: «Проведем прямую через точки A и B...». Но на доске нет точек и невозможно провести прямую: геометрические точки и прямые – это идеальные объекты, они не существуют иначе как в абстрактном мышлении, их, в строгом смысле, нельзя даже *представить,* а можно только *мыслить.*

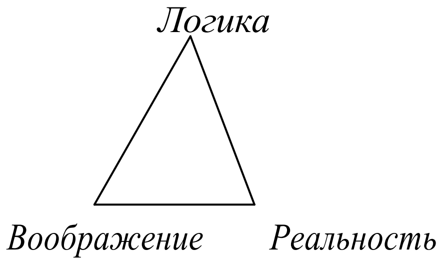
Утверждения геометрии высказываются и доказываются для идеальных геометрических объектов, но воспринимаются как утверждения об объектах наглядно представимых и применяются к реальным вещам, в которых идеальные объекты геометрии реализуются нередко очень условно. Стереометрия начинается с того, что «через три точки проходит плоскость». Но показать это реально можно лишь с чрезвычайной условностью. «Плоскость» в реальности – это либо «плоский предмет», либо «плоская поверхность» предмета, т. е. не геометрическая плоскость как таковая, тем более бесконечная.

При всей своей абстрактности геометрия возникла из практики и применяется в практике. Поэтому *преподавание* геометрии обязательно должно связывать ее с реальными вещами, с другими дисциплинами, особенно с физикой (и через приложения, и в иллюстрациях геометрических понятий и утверждений, и в определениях основных понятий).

Например, в действующем курсе геометрии перемещение определяют как отображение всего пространства или (в планиметрии) – всей плоскости. Но это нелепо. На самом деле перемещают предметы. Соответственно, в курсе геометрии нужно начинать с понятия о перемещении фигур как образе реальных перемещений предметов с одного места на другое[8]; это отвечает наглядному представлению и удобно в геометрии (например, если нужно одновременно переместить две фигуры так, чтобы они покрыли данную точку).

При всем этом связь геометрии с реальностью заключает противоречие – несоответствие реальных вещей геометрическим абстракциям.

Таким образом, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление, применение к реальным вещам. Этот «треугольник» составляет, можно сказать, душу преподавания геометрии; воображение ближе к реальности, как это и изображено на схеме.



Задача преподавания геометрии – развить у учащихся соответствующие три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Разумеется, в задачи курса геометрии входит: дать учащимся, как это принято говорить, основные знания и умения в области геометрии. Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключены в трех указанных элементах, во-первых, ввиду их значения для общего развития, во-вторых, потому, что они уже включают основное из тех знаний, которые должен давать курс геометрии. Поэтому остановимся сначала на этих элементах.

2. Воображение и реальность

Воображение – это прекрасная и могущественная способность человека. Что являет собой, в подавляющей части, искусство и техника, как не воплощен-

[8] Перемещение материальной точки с одного места на другое – из геометрической точки *A в точку B* – осуществляет отображение *A на B,*

ное воображение!? Научные идеи и теории также оказываются, в большой мере, его порождениями. Пространственное воображение, развитию которого служит геометрия, составляет важный компонент в общей способности человека к воображению и имеет существенное значение в ряде отношений.

Оно, разумеется, вообще необходимо человеку для ориентировки в окружающем мире и в развитой форме существенно для многих видов деятельности. Оно нужно квалифицированному рабочему, инженеру, архитектору, авиатору, скульптору и т. д.

Вместе с тем развитие пространственного воображения расширяет видение мира, делает его более пространственно выпуклым и содержательным, подобно тому, что делает стереоскоп с плоскими снимками.

Развитое воображение обогащает внутренний мир человека, давая ему возможность создавать в себе я, созерцать разнообразные картины.

Словом, развитое пространственное воображение – это важный элемент общей культуры. Геометрия, требуя воображать геометрические образы в их идеальной точности и логической определенности, дает этим пространственному воображению утонченность и точность.

Великий архитектор нашего века Ле Корбюзье (1887— 1965) писал:

«Геометрия есть средство, с помощью которого мы воспринимаем среду и выражаем себя. Геометрия — это основа. Кроме того, она является материальным воплощением символов, выражающих все совершенное, возвышенное. Она доставляет нам высокое удовлетворение своей математической точностью. Машина идет от геометрии. Следовательно, человек нашей эпохи своими художественными впечатлениями обязан в первую очередь геометрии. После столетия анализа современное искусство и современная мысль рвутся за пределы случайного, и геометрия приводит их к математическому порядку и гармонии. Эта тенденция усиливается с каждым днем»[9].

В этих вдохновенных словах геометрия воспета в ее воплощении в реальных вещах, в единстве геометрического образа и его материального осуществления. «Машина идет от геометрии». Вся техника пронизана геометрией и начинается с геометрии, ибо всюду, где нужна малейшая точность размеров и формы, где нужна структурность взаимного расположения частей – там вступает в силу геометрия.

Конструктор, рабочий-изобретатель, инженер представляют себе сначала примерный вид создаваемой детали или конструкции, чертят, уточняют, делают модели; наконец, складывается точное представление, делаются рабочие чертежи, и по ним воссоздают пространственный вид предмета, изготовляют его. Так происходит взаимодействие пространственного воображения, изображения на чертеже и реального воплощения в модели или в готовом предмете.

В механике и в физике геометрические представления также играют фундаментальную роль уже потому, что движение, процессы происходят в пространстве. Вспомним хотя бы кинематику и геометрическую оптику. Вспомним еще

[9] *Ле Корбюзье.* Градостроительство// Ле Корбюзье. Архитектура XX века. М., 1977. С. 25.

строение кристаллов, пространственные модели сложных молекул, симметрию живых организмов и др.

О значении пространственных представлений в изобразительном искусстве и архитектуре говорить не приходится – оно очевидно. (Отметим, между прочим, что посвященная искусству книга одного из самых выдающихся советских художников – Петрова-Водкина – называется «Пространство Евклида».)

Ученику нужно показать эти реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами.

Пространственные представления, геометрическая интуиция играют существеннейшую роль вне геометрии и в самой математике. Математический анализ немыслим без геометрических образов, начиная с числовой прямой, графиков функций и т. д. Эта роль геометрии сказалась в нашем веке в создании функционального анализа, занявшего с его основным понятием пространства функций центральное место в современной математике. Чтобы не возбудить подозрений в стремлении автора-геометра расхвалить свою науку, сошлюсь на суждение одного нашего выдающегося математика другой специальности: «Пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, но возможность направленно воспитать, а затем применить к ним первоначально развитую конечномерную (даже трехмерную) интуицию оказалась исключительно плодотворным открытием»[10].

Этот пример – формирование громадной области науки по указаниям геометрической интуиции – с большой силой показывает нам ту направляющую роль, какую играет геометрическое воображение в его союзе с логикой. Точно так же должно быть и в школьном преподавании.

Изложение любого элемента курса – будь то аксиома, определение, теорема, задача – должно начинаться с наглядной картины, которую учащиеся и должны усвоить в первую очередь. Надо, чтобы ученик представлял себе, допустим, что такое пирамида, мог описать ее, мог решить касающуюся ее простую задачу. А если при этом он не может безошибочно произнести точного ее определения – в этом еще нет большой беды.

Существенно наглядно-оперативное знание предмета, содержащее наглядные представления и умения правильно ими оперировать. Все представляют себе, что такое стул, и умеют им пользоваться, но, наверное, каждый затруднится произнести сразу, как на экзамене, определение: «стулом называется...». У математиков XVII – XVIII вв. не было точных определений ни функции, ни предела, ни самого переменного *x*, но они действовали с замечательным успехом (вспомним хотя бы Эйлера).

Педантичное стремление дать каждому понятию словесное определение может вести к тому, что вместо пояснения и уточнения представлений, которые уже есть у учащихся, вместо формирования у них новых ясных понятий им дает-

---

[10] *Манин Ю.И.* Математика и физика. М.: Знание, 1979. С.10.

ся нечто трудно представимое или вовсе невообразимое, а лишь выраженное в словесной оболочке – порой такое, что они не могут ни понять правильно, ни применить.

Например, в действующих учебниках дается определение: направлением называется множество всех сонаправленных лучей. И так как ученикам уже внушили, что множество – это собрание элементов, что оно состоит из своих элементов, то выходит, что направление *состоит* из всех сонаправленных лучей. Интуитивное понятие направления, свойственное каждому человеку, заменяется чем-то невообразимым и к тому же совершенно бесполезным, поскольку таким понятием направления никто, собственно, не пользуется... Сходное положение обнаруживается с понятиями вектора, многогранника и др.

Вряд ли есть что-либо более вредное для духовного, умственного и морального развития, чем приучать человека произносить слова, смысл которых он толком не понимает и при надобности действует не по этим словам, а по другим понятиям.

Однако мы свернули на критику существующих учебников, которая сейчас вовсе не входит в нашу задачу. О них стоило упомянуть лишь затем, чтобы ярче оттенить значение наглядности и не дать подумать, что, всячески подчеркивая ее значение, мы «ломимся в открытые двери». Вовсе нет! Есть все основания четко выдвинуть и подчеркнуть как первый основной принцип преподавания геометрии: каждый элемент курса геометрии должен опираться на возможно более простое и ясное наглядное представление, с такого представления надо начинать и им руководствоваться в изложении.

Соответственно этому изложение следует начинать с наглядной картины – с рисунка на доске, описания, показа модели, примеров.

В стереометрии существенно именно рисовать, чтобы вызвать пространственное представление, пользуясь, например, штриховкой, оттеняющей грани многогранника и т. п. (В этой связи заметим в скобках, что на физико-математических и естественных факультетах педагогических институтов полезно было бы ввести занятия по специальному рисованию.)

Вместе с рисунком должно идти разъяснение его пространственного содержания, возбуждающее верное пространственное представление. Одновременно нужно разъяснять также точный геометрический смысл изображаемого – пронизать и организовать наглядное представление точной логикой. Тут же необходимо, если это не сделано ранее, дать реальные примеры из жизни, из техники и т. п.

Логически организованное представление дает нужную формулировку определения, теоремы или задачи. За этим вступают в действие логические доказательства.

Геометрический метод и состоит в том, что само логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением; лучше всего, когда доказательство или решение, можно сказать, видно из наглядной картины. (В старинных индийских сочинениях бывало так, что доказательство сводилось к чертежу, подписанному одним словом «Смотри!»). При прочих равных условиях следует предпочесть наглядный вывод вычислительному и ради наглядности можно жертвовать логической точностью и обоснованностью. Так, полезно привлекать наглядные соображения непрерывности, наглядно представляемые движения точек и фигур и другие образы, заимствованные даже из механики и физики («сам» Архимед пользовался механическими соображениями в своих геометрических выводах, хотя, конечно, окончательное оформление их совершал со всей строгостью).

К тому же подходу должен быть приучен и ученик – начинать с рисунка, с наброска, наглядного описания – отвечает ли он у доски, учит ли что-нибудь дома, решает ли задачу; вместе с рисунком должны идти пространственное представление, точное понимание и т. д.

Насколько важно сочетание ясного наглядного представления и точного понимания и насколько опасно пренебречь им, можно видеть на примере определения многогранника, данного в учебнике для IX – X классов. Это определение так усложнено и запутано, что его рекомендуют и не спрашивать у учеников. И не мудрено: авторы учебника сами запутались в своем определении и оно оказалось неверным! На рис. 523 страницы 338 учебника по геометрии для VI – VIII классов изображены пять многогранников и два из них не подпадают под определение, данное в учебнике для IX – X классов. А произошло это потому, что авторы не смогли соединить должным образом наглядное представление о многограннике с логической точностью формулировок.

Итак, изложение всякого раздела курса начинается с картины, с наглядного представления, обращается к логике формулировок и выводов, а затем полученное знание применяется и закрепляется при рассмотрении примеров и решении задач. Этот общий порядок изложения можно характеризовать кратко словами В. И. Ленина: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике...».

Так В.И. Ленин характеризовал вообще путь познании: «От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* – таков диалектический путь познания *истины* познания объективной реальности»[11]. Таким путем, скажем мы, и должно идти познание учащимися геометрии.

3. Логика и мировоззрение

Пока мы больше говорили об исходном пункте – о «живом созерцании»; обратимся ко второму – к «абстрактному мышлению», к тому элементу «треугольника», изображающего сущность геометрии, который был обозначен как логика.

Кажется, с давних пор общепризнано, что курс геометрии должен учить логическому мышлению и было бы лишним распространяться здесь на эту тему,

[11] *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. Т. 29. С. 152 – 153.

но все же представляется необходимым обратить внимание на некоторые моменты.

По-видимому, есть серьезная опасность, что многие учащиеся не столько усваивают с пониманием логику формулировок и доказательств, сколько заучивают их. Едва ученика выводят из заученной формулировки, из заученного хода рассуждений, как он теряется; он следует, собственно, не смыслу формулировки, не рассуждению, а их внешности, словесной оболочке.

Одно из первых средств преодоления этой опасности: уменьшить число формулировок и особенно доказательств, которые ученик должен знать – выучить, запомнить. Лучше, чтобы ученик знал доказательства немногих теорем, но знал с действительным их пониманием, чем старался бы вбить себе в голову доказательства тех десятков утверждений, которые содержатся в курсе геометрии даже за один класс.

Если мы хотим учить логическому мышлению, то и надо учить ему, а не заучиванию готовых рассуждений. Поэтому излагаемые формулировки и доказательства должны рассматриваться, скорее, как упражнения в логическом мышлении, чем как то, что надо знать.

Отсюда вытекает и следующий вывод: нужно давать возможно больше упражнений в логическом мышлении, как вообще нужно много упражняться, чтобы научиться какому-либо виду деятельности, будь то работа напильником, ходьба на лыжах или логические рассуждения. Поэтому полезно, во-первых, чтобы учащиеся разбирали много доказательств (разобрали, поняли), но не выучивали, не заучивали... Во-вторых, следует решать возможно больше задач на доказательство: гораздо полезнее и приятнее сообразить самому хотя бы маленький вывод, чем заучивать чужие рассуждения (если не считать тех, которые особенно поучительны, остроумны и красивы).

Логика геометрии заключена не только в отдельных формулировках и доказательствах, но во всей их системе в целом. Смысл каждого определения, каждой теоремы, каждого доказательства определяется, в конечном счете, только этой системой, которая и делает геометрию целостной теорией, а не собранием отдельных определений и утверждений.

Это заключенное в геометрии понятие о точной науке с ее строго разворачивающейся системой выводов так же существенно, как и точность в каждом выводе.

Геометрия так и должна быть преподана – с возможно большей строгостью всей ее системы. При этом надо понимать, что абсолютной строгости вообще не существует, и поэтому задача преподавания состоит в том, чтобы, приняв некоторый уровень строгости и определенную систему предпосылок, разворачивать на ее основе последующее изложение. При этом все существенное в курсе следует доказывать на принятом уровне строгости и не допускать логических перерывов, по крайней мере, в основных линиях курса.

Именно так – в полной логической связности – построено изложение в «Началах» Евклида. Так же, в общем, оно построено и в знаменитом учебнике Киселева. Он удачно популяризировал Евклида, и его завидный успех обусловлен в значительной мере именно тем, *что* на нём лежал отсвет гения Евклида, подобно тому как на переложениях для детей «Гулливера» и «Робинзона Крузо» остается след руки их великих создателей.

Требование изложить основные линии курса без логических пропусков, со всеми доказательствами, вовсе не означает, что ученики должны учить *все* эти доказательства: такая нагрузка была бы чрезмерной. Все доказательства могут быть разделены на три части: те, которые следует изучить и знать, те, которые надо понять, и, наконец, те, которые можно оставить, имея лишь в виду, что они могут быть предъявлены и разобраны по желанию всем классом или отдельными учениками в зависимости от их уровня. (Они должны быть изложены в учебнике в качестве дополнений.)

В изложении геометрии можно исходить из разных основных посылок, из разных систем аксиом, лишь бы в них не было ни противоречий, ни пропусков. Иначе говоря, принятая аксиоматика должна быть непротиворечивой и полной, в остальном ее выбор условен и должен определяться педагогическими соображениями, прежде всего простотой вывода из них основных следствий, за которыми пойдет развертывание собственного содержания курса. Безусловное значение имеет сама стереометрия как система положений, связанных логическими переходами. А система аксиом играет роль отправного пункта, от которого начинается прохождение этой системы.

В последнее время представилось необходимым перейти в школьной геометрии на более глубокий уровень строгости, чем тот, который был у Евклида. Эта большая строгость состоит прежде всего в явном указании и формулировке основных понятий и аксиом, которые в прежних изложениях только подразумевались.

Но, излагая более точно исходные посылки, формулируя принятые аксиомы, необходимо дальше держаться заложенного в них уровня строгости, не оставляя ни одного существенного пункта без доказательства, соответствующего принятому уровню. Иначе в курсе будет потеряна с и с т е м а, будет смазана логика его изложения и может оказаться, что в нем будет представлена не целостная наука – геометрия, а ее фрагменты, чтобы не сказать куски и обрывки, один – на одном уровне логики, другой – на другом, а то и вовсе без логики.

Если принят теоретико-множественный уровень, то нужно его держаться. Например, сформулировав аксиому: «прямая есть непустое множество точек», нельзя после этого принять без доказательства, что на каждой прямой есть по крайней мере две точки (как это сделано в пособии по геометрии для IX – X классов). Иначе уточнение исходных посылок остается без должного употребления и поэтому лишается смысла. Выходит, сначала произносятся «ученые слова», а потом действуют по «очевидности». Такое преподавание учит тому, что слова могут расходиться с делом.

Нельзя также оставлять без доказательства существенные теоремы курса, говоря: «примем без доказательства»... Так почти все в курсе оказывается принятым без доказательства или основанным на принятом без доказательства, и курс приобретает сходство с набором сведений по геометрии, тогда как он, по крайней мере стереометрия, должен дать ученикам не просто сведения по геометрии, а систему точности деталей и всей структуры.

Скрытая здесь глубокая задача курса геометрии состоит в воспитании научного мировоззрения, в воспитании его основы, которую образует безусловное уважение к установленной истине, требование доказывать то, что выдвигается в качестве истины, не допуская подмены доказательства ни верой, ни ссылкой на авторитет. Стремление к истине, поиск доказательств (или опровержений) – это активная, а потому и ведущая сторона в основе научного мировоззрения. Разворачиваясь в строгой системе точных понятий и выводов, геометрия дает представление о строго установленной истине, о заключенной в ней необходимости, так что ее нельзя ни изменить, ни подделать, ни обойти. Так курс геометрии воспитывает уважение к истине, воспитывает требование доказывать то, что утверждается в качестве истины... если, конечно, это требование не заменяется в курсе псевдодоказательствами или заявлениями: «примем без доказательства...». Так без доказательства можно принять мало ли что, и основанием будет служить ссылка на авторитет: верно потому, что сказано в учебнике (или учителем), а не потому, что доказано.

В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент. В простейшей, но очень важной форме он состоит в том, чтобы не судить без доказательств, не поддаваться впечатлениям, настроениям и наветам там, где нужно разобраться в фактах. Научная преданность истине и состоит в стремлении основывать свои убеждения в любом вопросе на наблюдениях и выводах настолько объективных, настолько не поддающихся посторонним влияниям, предвзятым мнениям и порывам темперамента, насколько это только доступно человеку. Впрочем, у нас нет здесь места развить эту, саму по себе чрезвычайно важную, тему нравственного содержания в основе научного мировоззрения. Мы только обращаем внимание на то, что курс геометрии в правильной его постановке и ориентации, воспитывая должное отношение к истине, тем самым вносит свой вклад в формирование научного мировоззрения и вместе с этим – в нравственное воспитание учащихся.

Конечно, если преподавание полностью замыкается в самой геометрии, то даваемое им развитие логического мышления и элементов научного мировоззрения не выйдет за ее специальные рамки. Поэтому педагог должен привлечь внимание учащихся к связи того, что делается в курсе геометрии, с более широкими проблемами и показать общее значение требований доказательности и точности в установлении истины вообще – не в одной лишь геометрии, а всюду. Но чтобы к тому была возможность, курс не должен быть перегружен специальным материалом. Тогда учащиеся смогут усвоить то, что действительно необходимо, и в меру сил продумать общие выводы.

Мировоззрение не выучивают, оно формируется человеком в результате переработки им опыта жизни, культуры и учения.

4. Знания и умения

Рассмотрев глубинные задачи преподавания геометрии, обратимся теперь к его явному содержанию – к тем знаниям и умениям, которые оно должно давать и вырабатывать у учащихся. Начнем с умений.

Можно сразу заметить, что выработка умения решать геометрические задачи и проводить доказательства уже заключена в сочетании геометрического воображения с логическим мышлением. Оно состоит в умении наглядно представить себе задачу, увидеть пути решения и логично провести его. Если же задача касается реальных вещей, то первое, что нужно уметь, – это представить ее как задачу математическую, как задачу геометрии (если это не сделано явно в ее постановке) и затем действовать по наглядному представлению и логике.

Геометрический метод и есть не что иное, как живое воображение, в котором находят указания для логически проводимого решения.

Вместе с этим чисто геометрическим методом применяются элементарная и векторная алгебра, тригонометрические функции и анализ. В школьной геометрии приложения алгебры, не считая отдельных задач, связаны с методом координат. Однако метод координат в пространстве как отдельную тему необходимо исключить из школьного курса: его включение создало без особой к тому надобности крайнюю перегрузку и уводит от основного содержания курса. Тема эта принадлежит аналитической геометрии пространства и должна быть оставлена для вузовского курса; в школе на ее настоящую проработку просто нет времени. Полезно дать только наглядное понятие о координатах в пространстве, наглядное, а не формальное, основанное на векторной алгебре, какое дано в действующем курсе. Некоторые же применения координат можно включить в задачи, не больше.

Лучше уделить больше места наглядным вещам, чтобы обогатить и закрепить развитие наглядных представлений и логического мышления, не замененного формальными выкладками.

Совершенно так же ни в коем случае не следует загружать учащихся искусственно усложненными задачами. Это касается не только геометрии. Задачи, предлагаемые, скажем, на выпускных экзаменах, бывают часто совершенно надуманными и содержат такие выкрутасы, какие не встречаются ни в практике, ни в самой изысканной науке. Истина, подобно подлинной красоте, проста как строки: «Тиха украинская ночь...» и так же чужда всяческим вывертам. Выверты и придумывают потому, что не умеют найти подлинное. Проще задать хитросплетенную задачу, чем вскрыть у ученика степень ясности и точности его наглядного представления и понимания (то же относится к задачам на вступительных экзаменах в вуз). Сила и острота сообразительности упражняется и обнаруживается на решении естественных по постановке, трудных и глубоких задач.

Векторная алгебра, включая скалярное произведение, нужна в физике и уже потому не должна быть исключена из курса геометрии. К тому же она имеет простое наглядное основание (как исчисление «направленных отрезков») и богатые приложения в самой геометрии. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы строить ее действительно на возможно более простых наглядных основаниях и в тесной связи с задачами физики. А то получается такое нелепое положение, когда физики рассказывают о векторах для своих нужд по-своему, а математики — по-своему, без всякой нужды.

Тригонометрические функции – это испытанный аппарат геометрии и их тоже нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически и возникли – из решения треугольников.

Применение анализа в вычислении объемов может быть отнесено к самому анализу в качестве его приложения, как это сделано для площадей криволинейных трапеций и др. Собственно геометрии принадлежат сами понятия площади, объема, площади поверхности и геометрические приемы, связанные с нахождением этих величин для простейших фигур.

В результате данного краткого обзора можно видеть, что в подавляющей своей части те умения, какие должен приобрести учащийся в курсе геометрии, охватываются сочетанием наглядного представления с логикой, о котором мы говорили выше.

То же сочетание охватывает и подавляющую часть тех знаний, какие должен давать курс геометрии. Однако следует откровенно признать, что значительная часть знаний, требуемых от школьника, выучивается и забывается, так как нужна не столько сама по себе в будущем для практической надобности или общего развития, сколько для успеваемости, а также для того, кто пойдет в вуз, где ему понадобятся специальные сведения по геометрии. Формальные знания в самом деле могут быть забыты. Можно забыть, например, формулу объема шара, как и другие формулы, которые можно найти в справочниках. Важнее сохранить в памяти наглядные представления, общие понятия и методы, чем загружать память деталями, которые по надобности выводятся из общих сведений или находятся в учебниках и справочниках.

Полезно исключить из программы как особую тему изучение многогранных и специально трехгранных углов, оставив ее только в качестве материала для задач. Тема эта стоит в курсе особняком и в ней нет надобности. Также предлагается, как уже было объяснено, исключить из курса стереометрии как особую тему метод координат в пространстве, уводящий от основных линий курса.

Зато полезно ввести некоторые наглядные вещи, касающиеся выпуклых тел, многогранников, перемещений, симметрии[12]; ввести затем, чтобы дать дополнительную пищу развитию воображения и расширению кругозора. Рассмотрение симметрии (фактически групп симметрии) правильных многогранников – прекрасное упражнение для развития наглядных представлений, а вместе с тем понятие симметрии – это самая современная наука, так как оно играет фундаментальную роль в новейших теориях физики.

Понятия, идущие из наглядной геометрии, вообще имеют в современной науке чрезвычайно большое значение, так что не надо думать, будто наглядное

---

[12] Симметрии в общем смысле слова как свойства фигуры, состоящего в возможности ее совмещения самой с собою путем (нетождественных) перемещений.

– это низшая, а не высшая математика. От простого и наглядного идет путь в высшее – путь геометрии.

Материал курса геометрии, как уже было сказано о доказательствах теорем, полезно разбить на три частя: обязательный минимум, который надо знать, потом то, с чем ученики д о л ж н ы быть ознакомлены, и, наконец, дополнения, с которыми учащиеся м о г у т быть ознакомлены. Курс должен заключать в себе возможность выбора в зависимости от тех или иных конкретных условий, таких, например, как уровень класса, склонности учителя и др.

Привести курс геометрии в достаточное соответствие со всеми изложенными в этой статье принципами представляется нелегким делом, тем более что существующий курс слишком нарушил эти принципы. Но всякая перестройка образования, как бы ни была она радикальна, не должна совершаться в порядке переворота. Переворот, который лет десять назад был совершен в геометрии, уже немало навредил ей. Нужны не перевороты, а усовершенствования, совершаемые настоятельно, но постепенно (не считая «хирургических операций отсечения» тех отделов курса, которые признаны ненужными). Конкретно преломить и осуществить глубокие задачи курса с его мировоззренческим значением в гармонии наглядного и логического, добиваясь при этом максимально возможной простоты и ясности, – все это достаточно трудно.

В заключение отметим, что изложенные принципы могут быть полностью отнесены к курсу геометрии в ПТУ. В нем должна господствовать та же линия на развитие пространственных представлений и логического мышления в связи с реальными вещами. Разница может быть лишь в том, что наглядный материал больше увязывается с производством и техникой, а некоторый менее нужный материал и некоторые логические тонкости могут быть опущены.

И.Я. Виленкин, Шварцбурд С.И.

Равенства, тождества, уравнения, неравенства[13]

В нашем журнале ранее были опубликованы статьи о множествах и о высказываниях, выражениях, переменных. Целью статей было ознакомить учителя математики, особенно учителя математики IV класса, с теми теоретическими сведениями, которые необходимы ему для правильного понимания теоретической и методической основы новой программы и нового стабильного учебника математики для учащихся IV класса. В этих статьях были в сжатом виде изложены теоретические сведения и их преломления в новом учебнике. В частности, было указано, что сведения из теории множеств и особенно из математической логики не являются предметом изучения в IV классе. Они служат своеобразной основой и прежде всего «подтекстом» учебника, содействуют развитию точного языка учащихся и дают возможность просто и логически обоснованно ввести основные математические понятия.

В этой статье мы рассмотрим, каким образом теоретико-множественный подход и опора на небольшое число первоначальных сведений из математической логики дают возможность вводить и формировать у учащихся такие важные математические понятия, как «равенство», «тождество», «уравнение» и «неравенство». При этом не весь материал, изложенный в статье, непосредственно связан с содержанием учебника IV класса. Теоретические обоснования не должны становиться достоянием учащихся ввиду их недоступности для детей. Учитель же математики должен понимать и знать теоретическую основу и методическую концепцию, которые положены в основу изучаемых в IV классе понятий.

1. Равенство числовых выражений. Возьмем два числовых выражения. Если мы соединим эти выражения знаком равенства, то получим некоторое высказывание, например: 8–3=20:4 или 15+12=30:2. Эти высказывания считаются истинными, если оба числовых выражения равносильны, т.е. если они имеют одно и то же числовое значение. Например, первое из написанных выше равенств – истинное высказывание, так как каждое из выражений 8–3 и 20:4 имеет числовое значение 5. Второе равенство является ложным высказыванием, так как числовое значение выражения 15+12 равно 27, числовое значение выражения 30:2 равно 15, а $1\neq 27$.

Хорошо известны некоторые правила, позволяющие сразу устанавливать равенство некоторых числовых выражений:

1) *Если в данном выражении заменить некоторое число числовым выражением, значение которого равно этому числу, то получится новое числовое выражение, равносильное данному.*

Например, заменяя в числовом выражении 15+ 6 число 6 выражением $2\cdot 3$, получаем числовое выражение $15+2\cdot 3$, равносильное исходному $15+6 = 15+2\cdot 3$.

[13] Статья была опубликована в 1970 г. в 4-м номере журнала «Математика в школе». Перепечатывается без изменений.

2) Если числовое выражение a равносильно числовому выражению b, а c – некоторое числовое выражение, то выражение $a+c$ равносильно $b+c$, выражение $a-c$ равносильно $b-c$ и выражение ac равносильно bc. Если, кроме того, значение c отлично от нуля, то выражение $a:c$ равносильно $b:c$.

Некоторые другие правила образования равносильных выражений будут рассмотрены далее.

Над числовыми равенствами, как и над любыми высказываниями, можно выполнять операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания. Рассмотрим некоторые примеры. Высказывание «7+4=11 и 24:3=8» есть конъюнкция двух высказываний: «7+4=11», «24:3=8». Оно истинно, так как истинны оба высказывания «7+4=11» и «24:3=8». Конъюнкция же двух высказываний «8+2=15 и 9–6=3» – ложное высказывание, хотя второе входящее в него высказывание «9– 6 =3» и истинно. Дизъюнкция высказываний «7+5=11 или 7+5=12» истинное высказывание, хотя первое из высказываний «7+5=11» и ложно (напомним, что дизъюнкция высказываний «A или B» истинное высказывание, если хотя бы одно из высказываний A, B истинно). Истинна и импликация высказываний «Если истинно, что 3+2=9, то истинно, что 3+5=12». Оба высказывания «3+2=9» и «3+5=12», из которых составлена импликация, ложны, поэтому истинна их импликация.

Особо отметим, что операцией отрицания по отношению к числовому равенству «$a = b$» есть высказывание «$a \neq b$». Например, отрицанием высказывания «8–4=15» есть высказывание «8–4$\neq$15». Первое высказывание ложно, а второе – истинно.

В статье «Высказывания, выражения, переменные» (Математика в школе. 1970. № 3) были указаны примеры упражнений и выдержки из объяснительного текста нового учебника математики IV класса, в которых фактически даны операции над высказываниями, хотя, естественно, об этом учащимся не говорят. Так, в учебнике встречаются конъюнкция и дизъюнкция высказываний, но не встречаются отрицания высказываний и лишь изредка в упражнениях употребляются высказывания вида «... если ..., то ...», т. е. импликации высказываний.

Естественное отрицание высказывания «$a = b$», т. е. высказывание *«$a \neq b$»,* в учебнике не встречается, хотя в математике оно необходимо и используется. Это объясняется тем, что введение этого высказывания наряду с введением «неравенств $<$, $\leq$, $>$ и $\geq$» привело бы к смешению понятий. Учителю, однако, необходимо иметь в виду, что знак «$\neq$» в математике употребителен и полезен.

2. Тождества. Рассмотрим высказывательную форму (т. е. предложение, в которое входят переменные) $x+y=y+x$.

Мы считаем, что переменные x и y принимают любые действительные значения (т. е. что область значений этих переменных – множество действительных чисел). Вообще говоря, высказывательная форма истинна при подстановке одних значений переменных и ложна при подстановке других значений. Однако высказывательная форма *«$x+y=y+x$»* оказывается истинной при подстановке любых значений переменных x и y. Такие высказывательные формы называют *тождествами.*

Итак, *высказывательная форма называется тождеством, если она истинна при подстановке любых значений переменных.* Разумеется, одна и та же высказывательная форма может быть тождеством в одной области значений переменных и не быть тождеством в иной области значений.

Например, $\frac{2\tilde{o}}{\tilde{o}} = 2$ является тождеством в области $x \neq 0$, но не является тождеством во всей области действительных чисел, так как левая часть не определена при $x = 0$.

Следующие тождества, выражающие свойства арифметических действий, являются основными:

а) $x + 0 = x$;

б) $x + (-x) = 0$;

в) $x + y = y + x$;

г) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

д) $x \cdot 1 = x$;

е) $x \cdot \frac{1}{\tilde{o}} = 1,\ x \neq 0$;

ж) $x \cdot y = y \cdot x$;

з) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

и) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Комбинируя эти тождества с утверждениями 1) и 2) из пункта 1, получают все разнообразие тождеств, встречающихся в теории многочленов и алгебраических дробей от одного и нескольких переменных.

Из перечисленных тождеств в учебнике IV класса приводятся не все.

Тождества в) $x + y = y + x$ и г) $(x + y) + z = x + (y + z)$ выражают переместительный (коммутативный) и сочетательный (ассоциативный) законы (или свойства) сложения.

Тождества ж) $x \cdot y = y \cdot x$ и з) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ выражают коммутативный и ассоциативный законы умножения.

Тождество и) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ выражает распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения.

В учебнике даны также тождества а) $x + 0 = x$ и д) $x \cdot 1 = x$.

Не приводится в учебнике тождество б) $x + (-x) = 0$, так как в программу IV класса не входят отрицательные числа (при любом x, не равном нулю, числа x и $-x$ противоположны – одно из них положительно, а другое – отрицательно). В учебнике не нашло отражения и тождество е) $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ при $x \neq 0$, так как понятие о числе, обратном данному, вводится лишь в V классе при изучении обыкновенных дробей.

Вместе с тем в учебнике IV класса приводится ряд тождеств, которые не считаются основными и могут быть выведены из основных тождеств: а) – и), – это тождества, опирающиеся на основные свойства равенств и на определения арифметических действий. Перечислим тождества, которые приводятся в учебнике и не считаются основными:

1) $a-0=a$; 2) $a-a=0$; 3) $(a-b)\cdot c = a\cdot c - b\cdot c$; 4) $a:1=a$; 5) $a:a=1$ при $a\neq 0$; 6) $0:a=0$ при $a\neq 0$; 7) $a\cdot 1=1\cdot a=a$; 8) $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

Тождества 1) и 2) являются следствием из определения разности двух чисел. Разностью двух чисел называется число, которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое. Поэтому истинно 1), ведь для проверки этого тождества надо проверить истинность тождества $a+0=a$. Но это есть тождество а) из списка основных. Тождество 2) $a-a=0$ можно доказать так. По определению разности из 2) вытекает, что $0+a$ должно быть равно a. Но $0+a=a+0$ на основании коммутативности сложения и $a+0=a$ по основному тождеству а), следовательно, 2) – истинно. Тождество 3) $(a-b)c=ac-bc$ получается из основного тождества и), если применить его для суммы двух чисел *а и* $-b$. Таким образом, для оправдания тождества 3), вообще говоря, нужны отрицательные числа. Однако в учебнике оно приводится лишь для тех случаев, когда $a\geq b$. Тождества 4), 5) и 6) получаются из определения частного и из основных тождеств. Тождества 7) и 8) являются следствием из коммутативности умножения.

В учебнике IV класса все тождества «проверяются» индуктивно. Вместо букв берут числовые значения и проверяют, удовлетворяют ли они тождеству. Выполнив проверку для нескольких случаев, дети считают их справедливыми для всяких числовых значений букв. При этом каждый раз в случае расширения класса чисел вновь проводится проверка всех законов арифметических действий. В IV классе такая проверка проводится один раз при изучении арифметических действий над натуральными числами и второй раз при изучении действий над десятичными дробями. В V классе проводятся еще две проверки законов – при введении отрицательных чисел и при введении обыкновенных дробей. Далее проверка должна проводиться еще два раза: для действительных чисел и при введении комплексных чисел.

3. Уравнения. Рассмотрим высказывательную форму $4x+17=25$. Мы уже знаем, что если подставить вместо переменной x какое-нибудь из ее значений, то в одних случаях получится истинное высказывание, а в других – ложное. Например, при $x=2$ – получаем ложное высказывание $4\cdot x+17=25$, при $x=2$ – истинное высказывание $4\cdot 2+17=25$. В связи с этим возникает задача: среди всех значений переменной выбрать те, при подстановке которых получается истинное равенство. В этом случае заданная высказывательная форма называется *уравнением.*

Итак, *уравнением называется высказывательная форма, имеющая вид равенства A(x, y, ... z) =B(x, y. .... z), относительно которого поставлена задача: найти все значения переменной (или переменных), при подстановке которых получается истинное высказывание.*

Каждое значение переменной (или переменных), при котором получается истинное равенство, называется корнем уравнения или, иначе, решением уравнения. Таким образом, решить уравнение – это значит найти множество всех его решений.

Уравнение может иметь одно, два, несколько и бесконечное множество корней, а может иметь и пустое множество корней. Например, уравнение $6x-11=31$

имеет один корень $x = 7$, уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$ – два корня 1 и 5, уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=0$ – пять корней 1, 2, 3, 4, 5. Уравнение $x^2+16=0$ не имеет ни одного (действительного) корня. А уравнение $3x+2x=5x$ имеет бесконечное множество корней, так как при любом действительном значении x равенство $3x+2x=5x$ истинно. Повторим, что если относительно равенства $3x+2x=5x$ ставится вопрос: найти все значения переменной x, при которых это равенство истинно, то оно является уравнением. Тот факт, что это равенство истинно для всех значений x, т. е. является, как мы говорили выше, тождеством, ничего не меняет – просто множество корней этого уравнения совпадает с множеством всех действительных чисел. Вот если бы было сказано «докажите, что для всех значений x выполняется равенство $3x+2x=5x$», то речь шла бы не о решении уравнения, а о доказательстве тождества. Итак, одно и то же равенство, содержащее переменные, может рассматриваться и как уравнение и как тождество, в зависимости от того, какая задача ставится – найти все значения переменной, при которых это равенство истинно (решить уравнение), или доказать, что оно истинно для всех значений переменной, принадлежащих данному множеству (доказать тождество).

Как и с каждой высказывательной формой, с уравнением связаны два множества – множество всех допустимых значений переменной и множество решений уравнения. Второе множество является подмножеством первого. Например, для уравнения $\tilde{o}^2 - 7\tilde{o} + 12 + \frac{4}{\tilde{o}^2} - 25 = \frac{4}{\tilde{o}^2} - 25$ множество допустимых значений переменной состоит из всех действительных чисел, кроме чисел 5 и –5 (при этих значениях переменной знаменатели дробей обращаются в нуль). Множество же корней состоит из двух чисел 3 и 4.

4. Равносильные уравнения. Два уравнения называются равносильными, если они имеют одно и то же множество корней (в частности, если оба уравнения имеют пустое множество корней).

Уравнения $2x=8$ и $3x+\frac{1}{(\tilde{o}-3)}=12+\frac{1}{(\tilde{o}-3)}$ равносильны друг другу.

Может случиться, что одно уравнение оказывается равносильным не одному уравнению, а дизъюнкции двух или нескольких уравнений. Например, множество корней уравнения $x^2-6x+8=0$ состоит из чисел 2 и 4. Таково же множество корней дизъюнкции двух уравнений $2x+6=10$ и $3x+6=18$ – корнем первого из них является число 2, а второго – число 4. Поэтому высказывательная форма «$2x+6=10$ или $3x+6=18$» истинна при $x=2$ или при $x=4$.

5. Решение уравнений. Понятие равносильности уравнений играет важную роль при отыскании множества корней уравнения, или, как говорят, при решении уравнений. Обычно, чтобы решить уравнение, его заменяют равносильным ему уравнением (или дизъюнкцией уравнений), потом снова заменяют равносильным уравнением до тех пор, пока не придут к уравнению вида $x = a$ или к дизъюнкции уравнений такого вида. При этом опираются на утверждения, которые мы приводим без доказательства.

а) Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же выражение, определенное для всех допустимых значении переменной, то получится уравнение, равносильное исходному.

б) Если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение, определенное для всех допустимых значений переменной и не обращающееся в нуль ни при одном таком значении, то получится уравнение, равносильное исходному.

в) Если выражения $f_1(\tilde{o})..., f_n(\tilde{o})$ определены на некотором множестве *М,* то на этом множестве уравнение $f_1(\tilde{o})\cdot ...\cdot f_n(\tilde{o})=0$ равносильно дизъюнкции уравнений $f_1(\tilde{o})=0,\ f_2(\tilde{o})=0...,\ f_n(\tilde{o})=0$.

Покажем на примере, как решаются уравнения с помощью этих утверждений. Пусть надо решить уравнение

$$\tilde{o}^2-3x+5=3x-3. \qquad (1)$$

Сначала прибавим к обеим частям уравнения выражение с переменной $-3x+3$ (по утверждению а), это приводит к равносильному уравнению). После приведения подобных членов получаем уравнение $x^2-6x+8=0$. Разложим левую часть на множители, получим уравнение $(x-2)\cdot(x-4)=0$. По утверждению в), уравнение (1) равносильно дизъюнкции уравнений $x-2=0$, $x-4=0$. Прибавим к обеим частям первого уравнения число 2. Получим $x=2$. Точно так же из второго уравнения находим $x=4$. Таким образом, мы нашли два корня уравнения: 2 и 4.

Наряду с решением уравнений путем перехода к равносильным уравнениям на основании утверждений а) – в) применяются иные методы решения уравнений.

Так, в учебнике «Математика. 4 класс» уравнения решаются на основании определения и свойств арифметических действий. Например, чтобы решить уравнение $x+6=10$, пользуемся определением разности и получаем, что $x+6=10$ может быть истинно лишь в случае, когда истинно равенство $x=10-6$, т. е. $x=4$. Число 4 есть решение уравнения.

Более сложные уравнения решаются «по цепочке». Например, чтобы решить уравнение $4(3x+1)-5=23$, по определению арифметических действий

$4(3x+1)=28;$

$3\cdot 2+1=28:4;$

$3x+1=7;$

$3x=7-1;$

$3x=6$

и значит $x=6:3$; $x=2$. Число 2 – корень исходного уравнения.

Однако метод использования арифметических действий не годится, если переменная находится в обеих частях уравнения, например, если уравнение имеет вид $8x=3x+15$. Здесь нельзя сослаться на определение суммы и сказать, что слагаемое 15 есть разность суммы $8x$ и второго слагаемого $3x$, т. е. что $8x-3x=15$. Дело в том, что здесь x не число, а переменная, а уравнение – это высказывательная форма. Равенство $8x-3x=15$ истинно лишь в случае, когда истинно равенство $8x=3x+15$, т. е. когда x – корень заданного уравнения.

Допустимо здесь следующее рассуждение. Предположим, что корень уравнения найден. Тогда при подстановке этого корня вместо переменной x получится истинное равенство. Теперь $8x=3x+15$ стало истинным равенством, x обозначает здесь уже не переменную, а только то ее значение, при котором равенство истинно. Но к обеим частям истинного равенства можно прибавить, не нарушив его, одно и то же число $-3x$ (это число, а не выражение, так как мы условились считать, что x имеет определенное значение). Итак, $8x-3x=15$, $5x = 15$, а поэтому $x = 3$. Мы доказали, таким образом, что *если* x – корень уравнения $8x=3x+15$, то $x = 3$. Осталось проверить, что $x = 3$ действительно является корнем данного уравнения. В результате подстановки получаем верное равенство $8\cdot 3=3\cdot 3+15$. Итак, единственный корень уравнения $8x=3x+15$ равен 3. При таком подходе к решению уравнений проверка корней становится неотъемлемой частью решения. (Впрочем, всегда полезно проверить найденные корни уравнения, чтобы узнать, не сделана ли какая-нибудь ошибка при решении). Отметим, что действия, выполняемые при решении уравнений, по сути дела не зависят от того, решаем ли мы его на основании понятия равносильности, на основании свойств арифметических действий или на основании предположения, что x – корень уравнения (лишь в последнем случае обязательно провести проверку корней).

Таким образом, мы сейчас рассмотрели три разных приема решения уравнений: опирающийся на использование теорем о равносильности уравнений; опирающийся на свойства арифметических действий и предполагающий, что x – это искомое решение и тогда данное уравнение – истинное равенство двух выражений. Над равными выражениями производят операции (прибавление к обеим частям истинного равенства одного и того же числа, умножение обеих частей истинного равенства на одно и то же число и т. д.), и таким путем получают решение. Затем проводят проверку подстановкой в данное уравнение полученного числа в качестве предполагаемого корня уравнения.

Каждый из способов решения уравнения имеет свои достоинства и недостатки. Так, *первый* способ, использующий понятие о равносильности уравнений, логически строен, не требует проверки решения уравнений, дает возможность разобраться в решении сложных уравнений. Его использование в старших классах обязательно. В младших же классах он недоступен учащимся. Кстати, укажем, что некоторые методисты признают лишь решение уравнений на основе теорем о равносильности уравнений. Поэтому они считают, что раннее введение метода уравнений в курсе математики невозможно (так как без теории равносильности не может быть строгого решения уравнений).

Третий способ решения уравнений также логически оправдан. Его использовал проф. В. Л. Гончаров в «Начальной алгебре» – очень интересном учебнике (совместно с задачником).

В стабильном учебнике «Математика. 4 класс» рассматривается *второй* метод решения уравнений, а именно, способ, опирающийся на свойства арифметических действий. При этом даются лишь такие уравнения, которые содержат переменную только в одной части. К такого вида уравнениям учащиеся должны приходить и в ходе решения задач из учебника IV класса. В этих случаях не приходится вычитать из обеих частей уравнения выражения, содержащие переменные.

Хотя теоретическое обоснование способа решения уравнений, используемое в IV классе, отличается от применяемого в старших классах, ход решения остается тем же самым. Поэтому, когда учащиеся познакомятся с теорией равносильности, им не придется переучиваться.

6. Ч и с л о в ы е н е р а в е н с т в а. Множество всех действительных чисел является объединением трех непересекающихся подмножеств: множества положительных чисел, множества отрицательных чисел и множества, состоящего из одного элемента – нуля. При этом сумма и произведение двух положительных чисел – положительные числа.

Возьмем два действительных числа x и y и рассмотрим их разность $x–y$. Возможны три случая:

а) разность $x – y$ положительна;

б) разность $x – y$ отрицательна;

в) разность $x – y$ равна нулю.

В первом случае говорят, что x больше y, и пишут $x > y$, во втором — x меньше y, и пишут $x < y$. Третий же случай возможен лишь при условии, что
$x = y$.

Итак, для любых двух чисел x и y выполняется одно и только одно из соотношений:, $x < y$ и $x = y$. Следовательно, если $x \neq y$, то либо $x > y$, либо $x < y$ (на языке математической логики это означает, что высказывание вида «$x \neq y$» является дизъюнкцией высказываний видов «$x > y$» и «$x < y$»).

Из данного выше определения отношений $x > y$ и $x < y$ сразу вытекает, что высказывания «$x > 0$» и «x – положительное число» равносильны друг другу. Равносильны друг другу и высказывания «$x < 0$» и «x – отрицательное число».

Отношение «$x > y$» обладает следующими свойствами:

а) Если x, y, z – любые действительные числа, такие, что $x > y$ и $y > z$, то
$x > z$.

б) Для любых действительных чисел x, y, z, таких, что $x > y$, справедливо
$x + z > y + z$.

в) Для любых действительных чисел x и y, таких, что $x > y$ и любого положительного числа z, истинно высказывание $xz > yz$.

Эти свойства непосредственно вытекают из определения соотношения $x >y$ и свойств действий над числами. Например, чтобы доказать свойство а), заметим, что неравенства $x > y$ и $y> z$ означают положительность разностей $x–y$ и $y – z$. Но $x – 2= (x–y)+(y–z)$, а сумма двух положительных чисел положительна. Значит, $x – z > 0$ и $x > z$. Свойство б) сразу вытекает из того, что $(x+z) – (y+z) = = x – y$, а свойство в) из того, что $xz – yz = (x– y)z$, а произведение двух положительных чисел положительно.

Точно так же доказываются следующие высказывания:

г) если $x > y$ и $z > t$, то $x + z > y + t$;

д) если $x > y$ и $z < 0$, то $xz < yz$;

е) если $x > y$ и $z < t$, то $x – z > y – t$;

ж) если $x > y$, $y > 0$ и $z > t$, $t > 0$, то $xz > yt$;

з) если $x > y$ и n – любое натуральное число, то $x^n > y^n$;

и) если $x > y$, $y > 0$, то $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

Аналогичными свойствами обладает отношение $x < y$.

В учебнике IV класса никакие операции над неравенствами не выполняются. Выполняются лишь упражнения типа: проверить истинность неравенства, установить, какие числа являются решениями неравенства, и сравнить числовые значения выражений с помощью знака неравенства. Лишь в упражнениях повышенной трудности даны такие, при решении которых полезно вычесть из обеих частей неравенства по одному и тому же числу или разделить обе части неравенства на одно и то же число. Таковы упражнения 1302 (а, б, в, е); 1303 (а); 1304 (в); 1306 (в, г). Однако не предполагается, что учащиеся их будут так решать. В пособии «Математика в IV классе. В помощь учителю» даны лишь ответы. Предполагается, что учащиеся выполнят эти упражнения, догадываясь, какие из чисел удовлетворяют данным неравенствам. Так, например, в упражнении «Найдите все натуральные решения неравенства $x+x\leq 2$» учащиеся подставляют вместо x натуральные числа 1, 2, 3 и т. д. Сразу видно, что неравенству удовлетворяет лишь число 1, уже при значении 2 левая часть больше правой. Точно так же при решении в натуральных числах неравенства $200+x<209$ (1303 (*а*)), учащиеся ищут ответы, лишь подставляя натуральные значения вместо переменной x. Так, если подставлять вместо x натуральные числа 1, 2, 3, 4 и т. д., то можно заметить, что заданному неравенству удовлетворяют лишь значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Значения большие 8 не удовлетворяют неравенству.

7. **Отношения $\leq$, $\geq$. Двойные неравенства.** В учебнике математики IV класса рассматриваются также отношения «$a \leq b$», «$a \geq b$» и двойные неравенства $a < b < c$, $a \leq b < c$, $a < b \leq c$ и $a \leq b \leq c$. Определим смысл этих обозначений. Каждое из записанных неравенств есть высказывательная форма. При подстановке одних значений переменных получаются истинные высказывания, а при подстановке других – ложные. Высказывательная форма «$a \leq b$» есть дизъюнкция двух высказывательных форм «$a < b$» и «$a = b$». Дизъюнкция высказываний «$3 \leq 5$» истинна, так как истинно высказывание «$3 < 5$». Точно так же истинна дизъюнкция высказываний $5 \leq 5$», так как одно из двух высказываний «$5 < 5$» и «$5 = 5$» – истинно, а именно, истинно высказывание «$5 = 5$». Неравенство «$8 \leq 5$» ложно, так как ложны оба высказывания «$8<5$» и «$8=5$». Высказывательную форму «$a \leq b$» в математике читают так: «a не превосходит b» или «a не больше, чем b», высказывательную форму «$a \leq b$» читают так: «а не меньше, чем b». Двойное неравенство $a < b < c$ является конъюнкцией высказывательных форм «$a < b$» и «$b < c$». Двойное неравенство истинно лишь в том случае, если при подстановке вместо букв числовых значений получается два истинных неравенства вида «$a < b$» и «$b < c$». Например, неравенство «$4 < 10 < 18$» истинно, так как истинны оба неравенства «$4 < 10$» и «$10 < 18$». Неравенство же «$4 < 10 < 7$» ложно, так как хотя и истинно неравенство «$4 < 10$», неравенство «$10 < 7$» ложно. Аналогичный смысл получают двойные неравенства. Все сказанное выше

о неравенствах между числами без существенных изменений переносится на неравенства между числовыми выражениями. Например, неравенство $9 - 5 < 8 + 4$ истинно, так как истинно неравенство $4 < 12$, где 4 – числовое значение выражения $9 - 5$, а 12 – числовое значение выражения $8 + 4$. Отношения $\leq$, $\geq$, а также двойные неравенства включены в новый учебник IV класса не как операции над высказываниями. Об этом ученикам, разумеется, говорить невозможно. Для выяснения истинности или ложности высказывания учащиеся могут пользоваться лишь одним приемом – подстановкой натуральных значений вместо переменной. Для того чтобы не сделать эту работу учащихся слишком утомительной или невыполнимой, упражнения специально подобраны.

Так, например, в упражнении 286 (а) $21< x <27$ учащиеся замечают, что вместо x можно подставить лишь натуральное число, большее 21, т. е. 22, 23 и т. д. Но вместе с тем подбираемые числа не должны быть большими или равными 27. Поэтому множество решений неравенства $21 < x <27$ в натуральных числах есть множество $\{22, 23, 24, 25, 26\}$.

При выполнении упражнения 1304 (б) из пункта «Задачи повышенной трудности» $20 < 4x+ 4 \leq 40$ учащиеся ищут ответы, лишь подставляя натуральные значения вместо переменной x. При подстановке вместо x натуральных чисел 1, 2, 3, 4 и т. д. можно заметить, что неравенству удовлетворяют лишь значения 5, 6, 7, 8 и 9. Значения меньшие 5 и значения большие 9 не удовлетворяют неравенству, так как при этом не будет выполняться одно из неравенств ($<$ или $\leq$).

8. Доказательство и решение неравенств. Рассмотрим, наконец, неравенства с переменными, например: $4x+1< 7x+2$, $x^2 + 4x + 3 > 0$ и т. д.

Относительно таких неравенств тоже могут быть поставлены две задачи:

а) Доказать, что данное неравенство выполняется для всех значений переменной (или переменных), принадлежащих данному множеству.

б) Найти все значения переменной (или переменных), при которых истинно данное неравенство.

В первом случае говорят, что неравенство надо доказать, а во втором —что его надо решить. Множество всех значений переменной, при которых истинно данное неравенство, называется множеством его решений. Решить неравенство – это значит найти множество его решений.

Разумеется, множество решений неравенства зависит от множества значений переменной. Например, если допускаются лишь натуральные значения переменной и значение, равное нулю (так обстоит дело, например, в начале IV класса), то множество решений неравенства $x < 6$ состоит из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5. Если же рассматриваются все действительный числа, то множество решений этого неравенства бесконечно – ему принадлежат, например, числа –17; –3,2; 0; 1; 0,01; 1,001; 2,542 и т. д.

При решении неравенств используется понятие о равносильности неравенств. Два неравенства называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. Имеют место следующие утверждения.

а) Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же выражение, определенное для всех допустимых значении переменных, то получится неравенство, равносильное данному.

б) Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

При решении неравенств множество решений часто изображают геометрически. Рассмотрим некоторые простейшие неравенства.

Множество решений неравенства $x \le a$ состоит из всех точек числовой оси, расположенных слева от a, и из самого числа a (рис. 1).

Рис. 1

Множество же решений неравенства $x < a$ состоит из точек, расположенных слева от числа a, но само число a в это множество не входит. Аналогичный вид имеет множество решений неравенства $x \ge a$ (рис. 2).

Рис. 2

Если эти неравенства решаются в множестве, состоящем из натуральных чисел и нуля, то множества решений неравенств $x \le a$ и $x < a$ конечны, а множества решений неравенств $x \ge a$ и $x > a$ бесконечны. При этом множества решений неравенств $x \le a$ и $x < a$ отличаются лишь одним числом (числом a).

Теперь рассмотрим двойные неравенства. Множество решений неравенства $a \le x \le b$ состоит из всех точек числовой оси, лежащих между числами a и b, причем точки a и b включаются в это множество (рис. 3). Это множество называют *отрезком,* а точки a и b – *концами* отрезка.

Рис. 3

А множество решений неравенства $a < x < b$ состоит из всех точек числовой оси, лежащих между a и b, причем сами точки a и b не включаются в это множество (рис. 4). Такое множество называют *промежутком* с концами a и b.

Рис. 4

На рисунке 5 изображены множества решений неравенств $a \le x < b$ и $a < x \le b$.

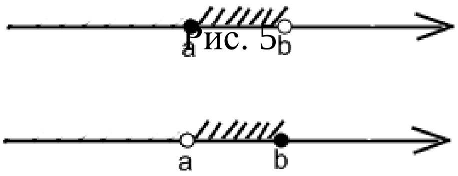


Рис. 5

Если неравенства решаются в множестве, состоящем из натуральных чисел и нуля, то может случиться, что различные неравенства имеют одно и то же множество решений. Например, для четырех неравенств $3 \le x \le 7$, $3 \le x < 8$,

$2 < x \le 7$, $2 < x < 8$ множеством решений является множество $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ (рис. 6).

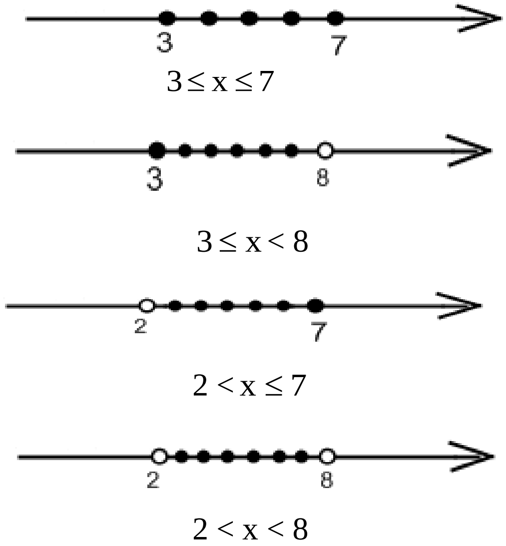


Рис. 6

При переходе же к множеству всех действительных чисел эти четыре неравенства имеют разные множества решений.