НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ ЧИСТОЙ МАѲЕМАТИКИ

сочиненныя

НИКОЛАЕМЪ ФУССОМЪ.

ЧАСТЬ II,

содержащая

начальныя основанія Геометріи,

изданныя

ГЛАВНЫМЪ ПРАВЛЕНІЕМЪ УЧИЛИЩЪ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ Типографіи Департамента Народнаго Просвѣщенія.

1823.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

Стрн.

Глава I. Опредѣленія, аксіомы и предварительныя изъясненія. 1
— II. О линіяхъ прямыхъ, углахъ и сторонахъ прямолинейныхъ фигуръ. 25
— III. О кругѣ и фигурахъ, въ немъ вписанныхъ и около него описанныхъ. 61
— IV. О линіяхъ пропорціональныхъ и о подобіи фигуръ. 88
— V. О сравненіи и измѣреніи фигуръ. 109
— VI. О превращеніи и о дѣленіи фигуръ. 132

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

Глава I. Опредѣленія, аксіомы и предварительныя изъясненія. 153
— II. О взаимномъ положеніи плоскостей, такъ же и о положеніи оныхъ въ разсужденіи прямыхъ линій, внѣ ихъ проведенныхъ. 172
— III. О поверхности тѣлъ. 193
— IV. О сравненіи тѣлъ. 209
— V. О толщинѣ тѣлъ. 220
— VI. О правильныхъ тѣлахъ. 232

ИЗЪЯСНЕНІЕ.

Предложеній, употребительныхъ въ Геометріи.

Опредѣленіе есть выраженіе, подающее ясное понятіе о той вещи, о которой говорится.

Аксіома есть предложеніе, котораго справедливость ясна, и не требуетъ никакихъ доказательствъ.

Ѳеорема есть предложеніе, котораго справедливость надобно доказать.

Вопросъ есть предложеніе, которое требуется рѣшить, а *рѣшеніе* должно быть сопряжено съ доказательствомъ.

Лемма есть предложеніе, которое рѣшается или доказывается для того, что бы служило приуготовленіемъ къ слѣдующимъ ѳеоремамъ или вопросамъ.

Слѣдствіе есть предложеніе, которое выводится изъ предъидущей ѳеоремы или вопроса.

Примѣчаніе на ѳеорему или на вопросъ есть изъясненіе, которое показываетъ ихъ связь съ прочими предложеніями, ихъ пользу, распространеніе, или предѣлы.

Порядокъ употребляемый при изслѣдованіи всякой науки, раздѣляя оную на разныя предложенія такъ, какъ оныя здѣсь означены, называется *порядкомъ маѳематическимъ* или *геометрическимъ*.

Всѣ маѳематическія науки, изключая свойственныхъ имъ аксіомъ, основываются еще на слѣдующихъ общихъ.

АКСІОМЫ.

I. Цѣлое больше своей части.

II. Цѣлое равно всѣмъ своимъ частямъ, вмѣстѣ взятымъ.

III. Ежели какія нибудь величины равны порознь другой величинѣ, то онѣ суть равны между собою.

IV. Ежели къ равнымъ величинамъ придадутся равныя, то и суммы ихъ будутъ равныя.

V. Ежели отъ равныхъ величинъ отнимутся равныя, то и остатки ихъ будутъ раные.

VI. Ежели нѣсколько величинъ содержатъ, каждая порознь, одинакое число разъ другую величину, то онѣ суть равны между собою.

VII. Ежели нѣсколько величинъ содержатся, каждая порознь, одинакое число разъ въ другой величинѣ, то онѣ суть равны между собою.

8. Двѣ величины, будучи наложены одна на другую [illegible] совпадаютъ [illegible] суть равны между собою

НАЧАЛЬНЫЯ ОСНОВАНІЯ

ГЕОМЕТРІИ.

ОТДѢЛЕНІЕ I.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ, АКСІОМЫ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ИЗЪЯСНЕНІЯ.

Опредѣленіе I.

§ 1.

Геометрія есть наука, которая показываетъ намъ свойства протяженностей, и научаетъ насъ измѣрять все то, что имѣетъ протяженіе.

Присовокупленіе.

§ 2.

Хотя въ природѣ однѣ токмо тѣла имѣютъ протяженность, однакожъ онѣ не суть единственный предметъ Геометріи; ибо самая пустота, предѣлами ограниченная, имѣетъ видъ и протяженность, какъ и тѣло, которое въ оной помѣститься можетъ. Слѣдовательно и невещественное пространство, предѣлы имѣющее, по опредѣленію 1, есть предметъ Геометріи. Сверхъ того, поелику протяженность всякаго тѣла опредѣляется поверхностями, поверхности линіями, а линіи точками, то не рѣдко одну изъ поверхностей тѣла разсматриваемъ, не взирая на толщину онаго. Въ иное время намъ нужно бываетъ измѣрить одну изъ линій, поверхность какую нибудь заключающихъ, не касаясь ширины оной. Такъ, на примѣръ, когда потребно будетъ сыскать поверхность пруда или ширину рѣки, не касаясь прочихъ размѣреній.

Примѣчаніе.

§ 3.

И такъ, поелику не токмо всякое тѣло, но и пустое опредѣленное пространство
2 имѣетъ три размѣренія: длину, ширину и вышину или глубину: то въ Геометріи протяженность раздѣляется на разные роды, и числомъ оныхъ родовъ считается три, которые суть: 1) *линія*, или протяженность въ длину, не имѣющая ни толщины ни ширины; 2) *поверхность*, или протяженность въ длину и въ ширину, не имѣющая толщины: 3) *тѣло* или протяженность въ длину, ширину и вышину, или толщину. Слѣдовательно, тѣло имѣетъ три размѣренія, поверхность два, линія одну, точка же никакого размѣренія не имѣетъ.

Опредѣленіе 2.

§ 4.

3 *Измѣрять* не иное что есть, какъ срав-

нивать одну протяженность съ другою данной величины, ~~и находить отношение мѣры къ мѣряемому количеству~~.

Присовокупленіе.

§ 5.

Но когда протяженность сравниваемъ, то явно, что мѣра съ мѣряемою величиною должна быть одинакаго рода, то есть, одинакаго числа размѣреній. И такъ, мѣра линій должна быть линія, мѣра поверхностей поверхность, и мѣра тѣлъ тѣло.

Примѣчаніе 1.

§ 6.

Какъ ~~порядокъ~~, такъ и удобность требуетъ, чтобы ~~о всякомъ~~ родѣ протяженности изслѣдовано было порознь: и для того надлежитъ начало ~~сдѣлать~~ отъ линій, потомъ приступить къ поверхностямъ, и напослѣдокъ къ тѣламъ. Линіи ~~и поверхности~~ составляютъ предметъ той части Геометріи, которая называется ~~*Планиметріею*~~; а самыя тѣла суть предметъ ~~второй~~ части, *Стереометріею* называемой. ~~Обѣ~~ сіи части составляютъ *простую Геометрію.*

Примѣчаніе 2.

§ 7.

Въ простой Геометріи мы разсматриваемъ прямыя линіи, и одну только кривую, называемую *кругомъ*, потомъ поверхности и тѣла оными линіями и поверхностями содержимыя. Другія кривыя линіи, равно какъ поверхности и тѣла отъ оныхъ происходящія, суть предметы *высшей Геометріи*. По сей причинѣ въ простой Геометріи всѣ вопросы рѣшить можно посредствомъ циркуля и линейки: чего ради предполагать должно, чтобы всякой умѣлъ употреблять циркуль и линейку для описыванія круга и проведенія прямыхъ линій. Всѣ прочіе способы, до рѣшенія геометрическихъ вопросовъ относящіеся, зависятъ отъ сихъ двухъ простыхъ дѣйствій.

Присовокупленіе.

§ 8.

Но всѣ линіи, проведенныя на бумагѣ, на доскѣ и проч., равно какъ и всѣ точки на оныхъ означенныя, суть несовершенное изображеніе линій и точекъ геометрическихъ. Всегда надлежитъ помнить, что линія должна быть безъ ширины и толщины, а точка безъ всякаго размѣренія.

Опредѣленіе 3.

§ 9.

Черт. 1. *Прямая линія* AB, проведенная на бумагѣ и проч. есть слѣдъ точки, которая движется отъ А къ В, не перемѣняя нигдѣ своего наплавленія. *Кривая же линія* DE, есть слѣдъ точки, которая въ пути своемъ отъ D къ E безпрестанно перемѣняетъ свое направленіе. Черт. 2.

Слѣдствіе.

§ 10.

Изъ сего слѣдуетъ: 1) что прямая линія есть самая кратчайшая изъ всѣхъ, которыя отъ одной точки къ другой провести можно; 2) что чрезъ двѣ данныя точки провесть можно безчисленное множество кривыхъ линій, но одну только прямую, и что слѣдственно положеніе прямой линіи двумя данными точками всегда опредѣляется; 3) что положивъ прямую линію на другую, всѣ точки меньшей линіи, будутъ находиться на большей.

6.

Аксіома 1.

§ 11.

Ежели наложивъ прямую линію CD на другую AB, такъ чтобы точка C упала на A, а точка D на B, то обѣ линіи, взаимно совмѣщающіяся (§ 10), будутъ равны между собою, то есть: AB = CD. И обратно, ежели обѣ линіи AB и CD равны между собою, то онѣ, положенныя одна на другую, взаимно покроются. Черт. 3.

Аксіома 2.

§ 12.

Черт. 4. Прямая линія DE, двѣ точки D и E соединяющая, пересѣкаетъ другую прямую линію
7 AB, проведенную между оными, въ *одной* только точкѣ C, которая называется *точкою пересѣченія*. Ибо, ежели бы линія DE пересѣкла линію AB еще въ другой точкѣ, на примѣръ F, то возможно бы было чрезъ двѣ точки D и F провесть двѣ прямыя линіи DCE и DFE; что быть не можетъ (§ 10).

Опредѣленіе 4.

Непосредственно пространство ограничен-
ное двумя взаимно пересекающимися ли-

§ 13.

ниями в одной точке

Черт. 5. ~~Ежели двѣ прямыя линіи AB и AC взаимно пересѣкаются въ точкѣ A, то одна къ другой~~
8 ~~имѣетъ *наклоненіе* Сіе наклоненіе оныхъ линій~~ называется *угломъ прямолинейнымъ*. Линіи AB и AC, ~~въ разсужденіи угла, который онѣ составляютъ~~, называются *сторонами* сего угла, а точка A его *вершиною*.

Присовокупленіе.

§ 14.

9 Уголъ означается знакомъ $\angle$, видъ угла имѣющимъ, и тремя буквами, кои находятся при концахъ линій, уголъ составляющихъ,

изъ которыхъ буквъ средняя означаетъ вершину угла. Такъ уголъ A, между линіями AB и AC содержащійся, означенъ будетъ симъ образомъ, ∠ABC. Между тѣмъ, когда только двѣ линіи пересѣкаются, то уголъ означенъ быть можетъ одною буквою, при вершинѣ его находящеюся. Такъ, ежели точка A есть вершина одного только угла, то для означенія угла, между сторонами AB и AC содержащагося, довольно написать ∠A.

Опредѣленіе 5.

§ 15.

Ежели прямая линія AB пересѣчена будетъ линіею DE въ точкѣ C, то около точки C будутъ находиться четыре угла ACD, BCD, ACE и BCE, которые получаютъ наименованія, по разному ихъ взаимному положенію. Ибо углы ACD и BCD, которые имѣютъ одну сторону CD общую и двѣ прочія AC и BC въ одной прямой линіи AB, называются *смежными углами*: а углы ACE и BCD, или ACD и BCE, у которыхъ стороны одного суть продолженія сторонъ другаго, называются *углами накрестъ лежащими*. Иные называютъ ихъ *углами противу лежащими*. Черт. 4.

ω

Аксіома 3.

§ 16.

Черт. 5 и 6. Два угла прямолинейные BAC и EDF суть равны между собою, когда по наложеніи стороны DE на AB такъ, чтобы вершина D лежала на A, сторона DF ляжетъ на сторону AC. Когда же DF упадетъ внутрь угла BAC, то сей уголъ будетъ больше нежели EDF; а когда DF упадетъ внѣ угла BAC, то сей уголъ будетъ меньше нежели EDF.

Слѣдствіе.

§ 17.

И обратно, ежели два угла EDF и BAC суть равны между собою, то по наложеніи сторонъ DE и AB одной на другую такъ, чтобы вершина D лежала на A, стороны DF и AC будутъ лежать одна на другой. Ибо ежели бы въ такомъ предположеніи сторона DF не лежала на AC, то сторона DF упала бы или внѣ или внутри угла BAC. Въ первомъ случаѣ уголъ BAC былъ бы меньше угла EDF, а въ другомъ былъ бы больше; но по положенію оба угла равны между собою, слѣдовательно стороны равныхъ угловъ падаютъ однѣ на другія.

Присовокупленіе.

§ 18.

Здѣсь замѣтить надлежитъ, что углы BAC и EDF могутъ быть равны, хотя ихъ стороны не одинакой длины, по тому что величина угловъ, по опредѣленію § 13, не зависитъ отъ длины сторонъ, но отъ наклоненія оныхъ, которое отъ прибавленія или убавленія сторонъ не перемѣняется.

Опредѣленіе 6.

§ 19.

Изъ двухъ смежныхъ угловъ ACD и BCD, большій ACD называется *тупымъ*, а меньшій BCD *острымъ*. Черт. 4.

Опредѣленіе 7.

§ 20.

Ежели прямая линія DC на другую AB такъ падаетъ, что оба смежные угла ACD и BCD равны между собою, то линія CD называется *перпендикулярною*, а углы ACD и BCD *прямыми*. Черт. 7.

Слѣдствіе. 1.

§ 21.

Изъ сего слѣдуетъ, что двѣ линіи, изъ которыхъ одна лежитъ на продолженіи другой, содержатъ между собою два прямые угла.

Слѣдствiе 2.

§ 22.

И такъ сумма двухъ смежныхъ угловъ ра-
12 вна двумъ прямымъ. По сей причинѣ иногда одинъ называется *дополненiемъ* другаго до двухъ прямыхъ.

Слѣдствiе 3.

§ 23.

Черт. 7. Сверхъ того явствуетъ, что въ точкѣ C одну только перпендикулярную линiю на AB поставить можно. Ибо всякая другая линiя
13 CF, изъ C проведенная, дѣлаетъ два смежные угла ACF и BCF, неравные между собою. Слѣдовательно линiя CF не будетъ перпендикулярная къ AB (§ 20).

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 8.

§ 24.

Черт. 7. *Разстоянiе* точки D отъ прямой линiи
14 AB есть перпендикулярная линiя DC, изъ точки D на линiю AB опущенная.

ОПРЕДѢЛЕНIЕ 9.

§ 25.

Черт. 3. ~~Ежели~~ двѣ линiи AB и CD на одной пло-
15 скости ~~такъ проведены будутъ, что никогда~~ ~~взаимно не встрѣчаются ни по которую~~ ~~сторону, какъ бы далеко впрочемъ продол-~~ ~~жены ни были~~; то онѣ называются *парал-лельными*.

Слѣдствіе.

§ 26.

~~Изъ сего слѣдуетъ, что ежели двѣ прямыя~~ не имеющия сего свойства
~~линіи такъ проведены будутъ, что продол-~~ 16
~~жены будучи въ обѣ стороны, взаимно гдѣ~~
~~нибудь встрѣчаются, то онѣ не будутъ~~
параллельны между собою.

Присовокупленіе.

§ 27.

Для означенія параллельнаго положенія линій, употребляется знакъ #, который замѣняетъ слово *параллельная.* Такъ AB # CD означаетъ, что линія AB параллельна линіи CD.

Опредѣленіе 10.

§ 28.

Ежели двѣ параллельныя линіи AB и CD пересѣчены будутъ третьею линіею EF въ точкахъ G и H; то углы 15 CGF и CHE, равно какъ AGF и DHE, называются *внутренними на крестъ лежащими.* Черт. 3.

Опредѣленіе 11.

§ 29.

Ежели прямая линія *ab* столько разъ содержится въ другой AB, сколько разъ третья *cd* содержится въ четвертой CD; то оныя четыре линіи *пропорціональны* между собою, то есть *ab* относится къ AB, Черт. 8. 17

какъ *cd* относится къ CD. Изъ Алгербы (§ 509) извѣстно, что сіе свойство такъ означается:

$$ab : AB = cd : CD.$$

Опредѣленіе 12.

§ 30.

Плоская поверхность или *плоскость*, есть та, которая въ длину и въ ширину по прямымъ линіямъ простирается такъ, что между всякими данными двумя ея точками проведенная прямая линія, вся падаетъ на сію поверхность. ~~Поверхность же, на которой не во всѣ стороны прямую линію провесть можно,~~ есть *кривая поверхность*.

18

Примѣчаніе.

§ 31.

Всѣ линіи и всѣ точки, которыя мы разсматриваемъ въ сей первой части Геометріи, полагаются находящимися на той же плоской поверхности, плоскостію бумаги или доски представляемой.

Опредѣленіе 13.

§ 32.

Фигура геометрическая называется та плоская поверхность, которая со всѣхъ сторонъ линіями заключена. Ежели фугура прямыми линіями ограничена, то она именуется *прямолинейною*; *криволинейною* же называется та, которой предѣлы суть кривыя линіи, или прямыя съ кривыми смѣшанныя.

Опредѣленіе 14.

§ 33.

Кругъ есть геометрическая фигура, ограниченная кривою линіею, *окружностію* круга называемою, которая вездѣ равно отстоитъ отъ одной точки С, *центромъ* или *средоточіемъ* круга называемой. Черт. 9. 19

Примѣчаніе.

§ 34.

Произхожденіе круга представить себѣ можемъ такимъ образомъ: Ежели линія СА обращается около конца С, пока придетъ на прежнее свое мѣсто, то самая линія СА опишетъ кругъ, а конецъ ея А опишетъ окружность онаго AEDFBKA. 20

Опредѣленіе 15.

§ 35.

Всѣ линіи, изъ центра С къ окружности проведенныя, какъ СА, CD, CB и проч. называются *радіусами* или *полупоперечниками*. 21

Слѣдствіе.

§ 36.

Изъ двухъ послѣднихъ опредѣленій очевидно слѣдуетъ: 1) что всѣ радіусы одного 22 круга, или двухъ равныхъ круговъ, суть равны между собою; 2) что всѣ круги, равными радіусами описанные, суть также равны между собою.

Опредѣленіе 16.

§ 37.

Черт. 9. Прямая линія EF, двѣ точки окружности круга соединяющая, называется *хордою*, а часть окружности между сими точками E и F содержащаяся, называется *дугою*. И часть радіуса къ хордѣ EF перпендикулярнаго, между дугою и хордою находящаяся, какъ DG, называется *стрѣлою*.

22

Присовокупленіе.

§ 38.

Для означенія дуги круга употребляется знакъ ◡. Напримѣръ ◡EF, означаетъ дугу EF.

Опредѣленіе 17.

§ 39.

23

Хорда, чрезъ центръ круга проходящая, называется *діаметромъ*, или *поперечникомъ*.

Слѣдствіе.

§ 40.

Черт. 9. Изъ опредѣленія явствуетъ, что каждый поперечникъ AB состоитъ изъ двухъ радіусовъ CA и CB, слѣдовательно поперечникъ есть въ двое больше радіуса, или радіусъ есть половина поперечника. И такъ, по-

24