ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

Соч. Франкера

съ перемѣнами и прибавленіями

перевелъ

Д. Перевощиковъ.

Издано при Университетскомъ Благородномъ Пансіонѣ.

МОСКВА, 1824.
Въ Университетской Типографіи.

Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles. Laplace.

Печатать дозволяется съ тѣмъ, чтобы по отпечатаніи, до выпуска въ продажу, представлены были въ Ценсурный Комитетъ: одинъ экземпляръ сей книги для Ценсурнаго Комитета, другой для Департамента Министерства просвѣщенія, два экземпляра для Императорской Публичной Библіотеки и одинъ для Императорской Академіи Наукъ. Москва, Октября 11 дня 1823 года. *Ординарный Профессоръ и Кавалеръ Иванъ Давыдовъ.*

ОТЪ ИЗДАТЕЛЯ.

Учебное сочиненіе о какой нибудь отрасли наукъ должно доставлять учащимся столько познаній, чтобъ они могли безъ труда переходить отъ него къ изслѣдованіямъ высшимъ. Достоинства такого сочиненія суть: 1, *метода* или способъ изложенія содержащихся въ немъ истинъ, которыя надобно располагать въ тѣснѣйшей связи, т. е. сочинитель обязанъ соединить ихъ такъ, чтобы всѣ онѣ проистекали изъ одной коренной истины очевиднымъ образомъ. Это научаетъ выводить заключенія и пользоваться ими при новыхъ вопросахъ. 2, Постигнувши сію тайну, учащійся и съ малымъ количествомъ истинъ будетъ въ состояніи пріобрѣтать новыя свѣдѣнія, даже самъ проложитъ путь къ открытіямъ. Посему нѣтъ надобности наполнять учебную книгу изслѣдованіями частными, которыя, обременяя память, непозволяютъ уму дѣйствовать свободно и удаляютъ отъ цѣли ученія. Не смотря на множество сихъ частныхъ изслѣдованій, сочиненіе не полно, ежели въ немъ не помѣщены всѣ главныя, общія основанія той науки, къ которой оно относится. 3, Примѣры должно разрѣшать помощію непосредственнаго приложенія предшествовавшихъ теорій, а не посторонними, искуственными пріемами. Притомъ надобно предпочитать изъ нихъ тѣ, которыхъ рѣшенія требуютъ большаго числа изложенныхъ умозрѣній. Наконецъ 4, краткость въ выраженіяхъ необходима; часто довольно одного указанія на прежнее изслѣдованіе, обременительнѣе же всего повторенія.

Изъ сего видно, что составить учебную книгу не такъ легко, какъ обыкновенно думаютъ; чтобъ написать сочиненіе сего рода объ одной части науки, должно обнимать всю науку; хорошія учебныя сочиненія весьма рѣдки потому, что познанія сочинителя часто не простираются далѣе его книги. Я думаю, что *Курсъ чистой Математики Франкера* составленъ съ великимъ искуствомъ и удовлетворяетъ вышеизложеннымъ условіямъ, или — лучше — самыя сіи условія составлены послѣ прилѣжнаго изученія сего Курса. Успѣшное преподаваніе Математики въ тѣхъ учебныхъ заведеніяхъ, въ которыхъ принятъ онъ за руководство, оправдываетъ мое мнѣніе. По сей причинѣ я старался пользоваться благопріятными обстоятельствами, чтобъ къ изданному переводу *Ариѳметики*, *Начальной Алгебры, Основаній Геометріи и Тригонометріи съ Аналитическою Геометріею двухъ измѣреній* присоединять прочія части Чистой Математики, составленныя тѣмъ же сочинителемъ: въ 1822 году изданы мною *Главныя основанія Аналитической Геометріи трехъ измѣреній*, для коихъ образцомъ было принято также сочиненіе Франкера (что объяснено въ Предисловіи къ сей книгѣ); теперь же предлагается читателямъ переводъ *Дифференціальнаго исчисленія*, сдѣланный съ перемѣнами и прибавленіями, въ которыхъ намѣренъ я дать отчетъ посредствомъ сего предувѣдомленія.

Поелику Франкеръ основалъ Дифференціальное изчисленіе на Лагранжевой теоріи функцій, то считаю необходимымъ предложить сперва слова самаго изобрѣтателя сей теоріи, дабы объяснить смыслъ и преимущество оной предъ другими основаніями Дифф. изчисленія (*).

»Теорія функцій имѣетъ одинъ предметъ съ Дифференціальнымъ изчисленіемъ, но не представляетъ тѣхъ затрудненій, которыя встрѣчаемъ въ его основаніяхъ и подробностяхъ. Посредствомъ сей теоріи оно тѣсно соединяется съ Алгеброю, отъ которой до сихъ поръ было отдѣлено столько, что составляло особенную науку.

»Всѣмъ извѣстны недостатки Метафизики безконечно малыхъ количествъ, предложенной знаменитымъ Лейбницомъ (*). Ейлеръ надѣялся уничтожить оные, принявши *дифференціалы* за нули; но по сему основанію отношеніе *дифференціаловъ* будетъ отношеніемъ нуля къ нулю, — отношеніемъ, о которомъ не можно составить никакого яснаго понятія.

»Маклоренъ и Даламбертъ прибѣгли къ способу предѣловъ: они думали, что отношеніе *дифференціаловъ* есть предѣлъ отношенія опредѣленныхъ разностей, изчезающихъ до нуля.

(*) Leçon sur le Calcul des Fonctions, à Paris, 1806.

(**) Лучшее объясненіе сей Метафизики въ смыслѣ Математическомъ предложено въ *Réflexions sur la Methaphysique du calcul infinitésimal*, par Carnot, à Paris, 1813. Часть сего сочиненія переведена на Русской языкъ и напечатана въ Казани, въ 1823 году.

Но ясно, что сей образъ представленія дифференціальнаго изчисленія ни чѣмъ не отличается отъ теоріи Ейлера: ибо отношеніе уничтожающихся разностей переходитъ наконецъ въ отношеніе нуля къ нулю. Сверхъ того не худо замѣтить, что понятіе предѣла не можно разпространить на всѣ выраженія, въ которыя превращается какая нибудь функція отъ уничтоженія въ ней нѣкоторыхъ количествъ, потому что сіи количества могутъ дѣлаться отрицательными, слѣд. въ Алгебраическомъ смыслѣ меньшими нуля, и слѣд. онѣ не имѣютъ предѣловъ. Такимъ образомъ погрѣшимъ противъ Геометрической строгости, ежели за предѣлъ подкасательныхъ примемъ подпересѣкающія (*).

»Разсмотрѣвши основательно всѣ различные способы Дифференціальнаго изчисленія (или одинъ и тотъ же способъ, но выраженный различнымъ образомъ), находимъ, что они изобрѣтены для полученія первыхъ членовъ разложенія функціи отдѣльно отъ прочихъ членовъ ряда, поелику всѣ вопросы, для рѣшенія коихъ потребно оное изчисленіе, зависятъ единственно отъ сихъ первыхъ членовъ. Изслѣдованія о кривыхъ линеяхъ привело къ способу безконечно малыхъ количествъ, который потомъ замѣнили способомъ предѣловъ; наконецъ изъ разсматриванія движенія выведена

(*) Лакроа хотѣлъ бы перемѣнить и самое понятіе предѣловъ, дошедшее до насъ отъ древнихъ Геометровъ, которые побѣждали трудности, а не уклонялись отъ нихъ. См. Traitè du calcul differentiel et du calcul integral. par Lacroix, à Paris, 1810 г. Т. I, стр. 13 и слѣд.

была *теорія флюксій*, которая сама по себѣ недостаточна для аналитическаго опредѣленія сихъ флюксій или скоростей, съ коими перемѣняются величины, и никакъ не можетъ обойтись безъ количествъ безконечно малыхъ. Изобрѣтая сіи способы новаго изчисленія, не могли усмотрѣть, что аналитическія рѣшенія задачъ удовлетворяются нахожденіемъ производныхъ функцій, входящихъ въ составъ первыхъ членовъ ряда, въ который разлагается функція данная. Нютонъ, разрѣшая вопросъ о кривой линеи, описываемой тяжелымъ тѣломъ въ сопротивляющейся *срединѣ*, первый сдѣлалъ подобное замѣчаніе, хотя и ошибся въ его приложеніи.

»И такъ всего естественнѣе и простѣе разсматривать прямо разложеніе функцій, не употребляя околичностей Метафизики безконечнаго или предѣловъ; чрезъ сіе Дифференціальное изчисленіе будетъ основано на чистыхъ началахъ алгебраическихъ (*).«

Руководствуясь сими разсужденіями, Лагранжъ доказываетъ алгебраически коренную теорему о разложеніи функцій; но его доказательство, основанное на свойствахъ уравненій, при началѣ можетъ показаться затруднительнымъ; притомъ я думаю, что оно не со-

(*) Способъ же предѣловъ будетъ служить пособіемъ для разрѣшенія тѣхъ вопросовъ, въ которыхъ прямыя линеи сравниваются съ кривыми, или пространства, ограниченныя прямыми линеями и плоскостями съ пространствами, опредѣленными кривыми линеями и поверхностями.

всѣмъ удовлетворительно, поелику изъ него не ясно видно, что коеффиціентъ втораго члена есть функція, производная изъ данной, или зависящая отъ сей послѣдней. Можетъ быть подобныя причины побудили Франкера алгебраическое доказательство замѣнить Геометрическимъ. Впрочемъ, соглашаясь со мнѣніемъ Лагранжа о способѣ предѣловъ, я немного отступилъ отъ своего подлинника въ томъ, что уголъ, составляемый касательною съ осью абсциссъ, не назвалъ предѣломъ угловъ, составляемыхъ пересѣкающими съ тою же осью. Тутъ же выпущено замѣчаніе объ изключеніяхъ, коимъ подвержена основная теорема: это сдѣлано изъ снисхожденія къ слабости начинающихъ, которые не могши понять силы сего замѣчанія, останутся въ нѣкоторомъ сомнѣніи и получатъ какъ бы недовѣрчивость къ самому изчисленію. Но когда приложенія сего изчисленія приведутъ ихъ къ упомянутымъ изключеніямъ, тогда все сдѣлается яснымъ, даже самыя изключенія послужатъ болѣе къ подтвержденію, нежели къ опроверженію всеобщности теоремы.

У Лейбница выраженія dy и dx имѣютъ полный и опредѣленный смыслъ, который въ способахъ Ейлера и Даламберта теряется совершенно. Въ сихъ послѣднихъ способахъ можно еще понимать, что должно разумѣть подъ $\frac{dy}{dx}$, но отдѣльно dy и dx не выражаютъ никакого понятія, почему и кажется страннымъ, что нѣкоторые излагатели Дифференціальнаго изчисленія по теоріи Ейлера или Даламберта употребляютъ dy и dx какъ дѣйствительныя количества. Выразительность знака $\frac{dy}{dx}$ заставила меня заменить имъ Лагранжево изображеніе ($f'x$ или y') производной функціи, которую назвалъ я *дифференціаломъ*, желая удержать сіе слово, къ коему привыкли отъ долговременнаго употребленія; но упомянутое замѣчаніе казалось мнѣ столь важнымъ, что я всегда старался согласоваться съ нимъ и $\frac{dy}{dx}$ употребляль какъ знакъ, а не въ смыслѣ отношенія какихъ-либо количествъ, и потому читатель во всей книгѣ не найдетъ, чему равняется dy.

Статью о дифференцированіи степеней раздѣляетъ Франкеръ на двѣ части: въ первой предлагаетъ отдѣльно способы дифференцированія степеней, имѣющихъ показателей цѣлыхъ, дробныхъ и отрицательныхъ, предполагая Нютонову теорему извѣстною и доказанною; во второй же объясняетъ общій способъ находить дифференціалъ функціи x^m, какое бы ни было число m. Первую изъ сихъ частей я выпустилъ по двумъ причинамъ: 1, мнѣ не хотѣлось предполагать, что Нютонова теорема уже доказана, поелику всѣ придуманныя для нее доказательства можно раздѣлить на два рода: къ первому относятся неудовлетворительныя, а ко второму извлеченныя изъ началъ дифференціальнаго изчисленія, закрытаго алгебраическими формами; 2, для дифференцированія дробныхъ и отрицательныхъ степеней надобно умѣть дифференцировать функціи сложныя, для чего правила предлагаются уже послѣ. Тутъ Франкеръ измѣняетъ самому себѣ: ибо онъ вездѣ предлагаетъ сперва общую теорію, а потомъ уже переходитъ къ ея случаямъ.

Соединивши Дифференціальное изчисленіе съ высшею Алгеброю, въ которой предложены главныя основанія теоріи рядовъ, при дифференцированіи функцій трансцендентныхъ Франкеръ могъ взойти въ нѣкоторыя подробности о рядахъ логариѳмическихъ и тригонометрическихъ, и снова обьяснить свойства постоянныхъ количествъ *k* и M; но издавая очое изчисленіе отдѣльно и намѣреваясь показать его употребленіе при разложеніи функцій въ ряды столь обширно, сколько позволяютъ предѣлы учебной книги, я опредѣлилъ токмо дифференціалы функцій логариѳмическихъ и тригонометрическихъ, все же прочее отнесъ къ Главамъ III и VII. Касательно Главы III, которой предметъ составляетъ теорія перемѣны независимаго перемѣннаго количества, должно замѣтить, что она совершенно передѣлана. Франкеръ, заимствуя сію теорію изъ *Calcul des Fonctions*, затруднилъ ее тѣмъ, что присоединилъ примѣры отвлеченные, взятые изъ приложеній Дифференціальнаго изчисленія къ Геометріи кривыхъ линей. Перенесши сіи примѣры въ свое мѣсто и придержавшись въ способѣ изложенія какъ можно ближе къ изобрѣтателю теоріи, я надѣюсь, что устранилъ затрудненія по возможности. Вообще я старался открывать источники, изъ коихъ Франкеръ почерпалъ матеріалы для своей книги, и если находилъ, что онъ много удалялся отъ своего образца, то считалъ нужнымъ дѣлать сближенія, думая, что способы оригинальныхъ писателей, каковы суть Лапласъ, Лагранжъ и Монжъ стоютъ того, чтобъ передавать ихъ съ возможною вѣрностію.

Изложивши всѣ правила дифференцированія функцій одного перемѣннаго количества, надлежало приступить къ разсмотрѣнію функцій многихъ перемѣнныхъ, хотя Франкеръ и отнесъ сіе разсмотрѣніе къ самому концу теоретическихъ изслѣдованій; отъ чего дифференцированіе уравненій онъ долженъ былъ основать на дифференцированіи многосложныхъ функцій одного перемѣннаго. Но естественнѣе вывести сіи дифференціальныя уравненія изъ разложенія въ ряды функцій двухъ между собою зависящихъ перемѣнныхъ количествъ: ибо уравненія составляютъ частный случай сихъ функцій. Притомъ самъ читатель усмотритъ, что по послѣднему способу дифференціальныя уравненія находятся гораздо простѣе. Такимъ же образомъ изысканія о значеніяхъ выраженій $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, и пр. присоединилъ я къ теоретической части Дифференціальнаго изчисленія, поелику отъ объясненій неопредѣленности выраженія $\frac{dy}{dx}$, которое представляетъ также нѣкоторую функцію, естественно было перейти къ общему изслѣдованію о знаменованіяхъ функцій, превращающихся въ $\frac{0}{0}$, и пр. Напротивъ сего теорію предѣловъ Тайлорова ряда отнесъ я уже къ приложеніямъ Дифференціальнаго изчисленія, именно къ теоріи разложенія въ ряды различныхъ функцій одного перемѣннаго: всякой можетъ понять, сколь тѣсно связаны между собою сіи двѣ теоріи. Тутъ отступилъ я отъ своего Автора, распространивши доказательство теоремы: *ежели $f'x$ остается положительною отъ $x = a$ до $x = a + b$ и не дѣлается безконечною, то fx возрастаетъ въ семъ пространствѣ*. Сіе распространеніе заимствовалъ я изъ Дифференціальнаго изчисленія Лакроа, съ которымъ часто справлялся, но токмо для составленія Главы VII возпользовался нѣкоторыми подробностями, опущенными Франкеромъ, вѣроятно для того, чтобъ не выдти изъ тѣсныхъ предѣловъ, которые назначилъ онъ для полнаго курса Математики: я же не имѣлъ надобности ограничивать себя столь много, и чрезъ то опустить весьма важные способы составленія рядовъ помощію дифференціальныхъ уравненій. На примѣръ безъ Iго вопроса § 67 нельзя бы найти разложеніе уравненія $y^3 - 3axy + x^3 = 0$, предложенное въ § 102, VII. Но какъ мое разложеніе несходно съ Франкеровымъ, то въ оправданіе себя привожу здѣсь всю выкладку въ сокращеніи.

По правилу Кардана находимъ

$$y = \sqrt[3]{\frac{-x^3 + \sqrt{(x^6 - 4a^3x^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-x^3 - \sqrt{(x^6 - 4a^3x^3)}}{2}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\left\{\sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{4a^3}{x^3}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{4a^3}{x^3}\right)}\right)}\right\}.$$

Ежели сдѣлаемъ $\frac{a^3}{x^3} = \varphi$, то по Нютоновой теоремѣ вычислимъ

$$(1 - 4\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\varphi - 2\varphi^2 - 4\varphi^3 - \ldots$$

и слѣд.

$$\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{4a^3}{x^3}\right)}\right)}=\sqrt[3]{2\varphi}\cdot\sqrt[3]{(1+\varphi+2\varphi^2+\ldots)}.$$

Подобнымъ же образомъ выведемъ

$$\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{4a^3}{x^3}\right)}\right)}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{(1-\varphi-\varphi^2-2\varphi^3-\ldots)}.$$

Но по § 67, I выходитъ

$$\sqrt[3]{(1+\varphi+2\varphi^2+\ldots)}=1+\tfrac{1}{3}\varphi+\tfrac{5}{9}\varphi^2+\ldots$$

и $\sqrt[3]{(1-\varphi-\varphi^2-2\varphi^3-\ldots)}=1-\tfrac{1}{3}\varphi-\tfrac{4}{9}\varphi^2-\ldots$

Соединивши все сіе, получимъ наконецъ

$$y=-x-a+\tfrac{1}{3}a^3x^{-2}-\tfrac{1}{3}a^4x^{-3}+\ldots$$

У Франкера же найдено

$$y=-x-a-a^2x^{-1}-\ldots$$

Послѣ сего я не сдѣлалъ никакихъ перемѣнъ до послѣдней Главы, въ которой прикладывается Дифференціальное изчисленіе къ кривымъ поверхностямъ. Сію Главу я составилъ совершенно по сочиненіямъ Монжа (*) и Лагранжа (**): ибо Франкеръ написалъ ее весьма кратко, думая, можетъ быть, что предметъ ея слишкомъ высокъ для сочиненія учебнаго.

(*) Application de l'analyse à la Géometrie, à Paris. MDCCCIX.

(**) Thèorie der fonctions analytiques, etc, à Paris, 1813.