КУРСЪ МАТЕМАТИКИ.

Соч. ЛАКРОА.

ЧАСТЬ V.

ТРИГОНОМЕТРІЯ.

1823.

ГЛАВА I.

Тригонометрія Прямолинейная.

1. Прямолинейный треугольникъ состоитъ изъ шести частей: изъ трехъ угловъ и трехъ сторонъ. Изъ доказанныхъ условій равенства треугольниковъ слѣдуетъ, что по тремъ частямъ, между которыми находится хотя одна сторона, всегда можно составить треугольникъ, т. е. опредѣлить прочія его части. Но какъ геометрическое *строеніе*, производимое посредствомъ циркуля и линейки, весьма часто не удовлетворяетъ желаемой точности; то для усовершенствованія рѣшеній упомянутаго вопроса надлежало примѣнить къ Геометріи вычисленіе, котораго точность зависитъ отъ нашего произвола. Въ *прямолинейной Тригонометріи* предлагаются способы *разрѣшенія треугольниковъ* посредствомъ вычисленія.

Первые Геометры, желавшіе посредствомъ дѣйствій ариѳметическихъ, или посредствомъ знаковъ алгебраическихъ, выразить отношенія между различными частями треугольника, должны были затрудняться въ составленіи уравненій изъ разнородныхъ величинъ, каковы суть стороны и углы тр—ковъ, измѣряемые дугами: но вскорѣ усмотрѣли, что если бы какимъ нибудь образомъ вычисленъ былъ рядъ треугольниковъ, коихъ углы имѣли бы всѣ возможныя величины; то между сими тр—ками непремѣнно бы заключался подобный искомому: тогда части сего послѣдняго опредѣлятся уже помощію пропорцій. Слѣдующій примѣръ объяснитъ сіе отвлеченное замѣчаніе.

2. Ежели въ тр—кѣ ABC (чер. 1) извѣстны углы B, C и сторона BC; то въ упомянутомъ ряду вычисленныхъ треугольниковъ должно найти такой, коего углы b и c равнялись бы угламъ B и C; сей тр—къ будетъ подобенъ ABC; и поелику стороны его ab, ac, bc извѣстны, слѣд. изъ пропорцій

$$bc : ab :: BC : AB, \quad bc : ac :: BC : AC,$$

въ которыхъ первые три члена суть данные, можно опредѣлить четвертые:

$$AB = \frac{BC \times ab}{bc}, \quad AC = \frac{BC \times ac}{bc}.$$

Сверхъ того уголъ $A = a$; посему всѣ части тр—ка ABC будутъ извѣстны.

3. Усмотрѣвъ такимъ образомъ пользу треугольниковъ, коихъ углы имѣютъ всѣ возможныя величины, и стороны извѣстны, надлежало найти средство составлять оные треугольники. Начиная простѣйшимъ случаемъ, предполагаю, что искомые треугольники суть прямоугольные: очевидно, что

всѣ они могутъ быть построены въ четверти круга, когда изъ каждой точки дуги AB (чер. 2) опустятся перпендикулярныя MP, $M'P'$, $M''P''$, и пр. къ радіусу AC и проведутся радіусы MC, $M'C$, $M''C$, и пр. Въ сихъ тр—кахъ углы при P, P', P'', и пр. будутъ прямые, углы же MCP, $M'CP'$, $M''CP''$, и пр. станутъ получать постепенно всѣ возможныя величины; наконецъ углы CMP, $CM'P'$, $CM''P''$, и пр., изъ коихъ каждый съ соотвѣтствующимъ изъ предыдущихъ, составляетъ уголъ прямой, будутъ удовлетворять свойствамъ прямоугольныхъ треугольниковъ. И такъ въ семъ ряду треугольниковъ всегда найдется такой, коего углы равняются данному тр—ку прямоугольному. Не излишне замѣтить, что всѣ тр—ки PMC, $P'M'C$, $P''M''C$, и пр. имѣютъ гипотенузою радіусъ дуги AB.

4. Можно еще составить рядъ треугольниковъ, имѣющихъ одною стороною прямаго угла радіусъ круга; для сего надобно только провести неопредѣленную касательную AF чрезъ конецъ радіуса AC, и чрезъ центръ C и точки M, M', M'' и пр. протянуть пересѣкающія CN, CN', CN'', и пр. Очевидно, что въ тр—кахъ CAN, CAN', CAN'', и пр., углы будутъ имѣть всѣ величины, возможныя для прямоугольнаго треугольника; слѣд. между сими тр—ками также всегда найдется подобный данному прямоугольному тр—ку.

5. Въ треугольникахъ CPM, CP′M′, CP″M″, и пр., коихъ гипотенуза не перемѣняется, стороны MP, M′P′, M″P″ и пр., возрастающія вмѣстѣ съ углами ACM, ACM′, ACM″ и пр. и съ измѣряющими ихъ дугами AM, AM′, AM″, и пр., получаютъ особенныя названія по причинѣ сей зависимости: онѣ именуются *синусами* соотвѣтствующихъ дугъ AM, AM′, AM″, и пр. И такъ *синусъ дуги есть перпендикулярная линея, опущенная изъ одного конца сей дуги на радіусъ, проводимый чрезъ другой ея конецъ.* Линеи CP, CP′, CP″, и пр., которыя уменьшаются, когда увеличиваются дуги AM, AM′, AM″, и пр., и которыя равняются перпендикулярнымъ MQ, M′Q′ M″Q″, и пр., къ радіусу CB, перпендикулярному къ AC, суть синусы дугъ BM, BM′, BM″, и пр.

Двѣ дуги, коихъ сумма или разность равняется четверти окружности, называются *дополнительными:* дуги BM, BM′, BM″, и пр. суть дополнительныя для дугъ AM, AM′, AM″, и пр. Линеи MQ, M′Q′, M″Q″, и пр., равныя линеямъ PC, P′C, P″C, и пр., именуются *косинусами* дугъ AM, AM′, AM″, и пр. И такъ *косинусъ дуги есть синусъ дуги дополнительной, и равняется части радіуса, содержащейся между центромъ и нижнимъ концемъ синуса.*

Посему прямоугольные треугольники CPM, CP′M′, CP″M″, и пр., имѣющіе равныя гипотенузы, составлены изъ синусовъ и косинусовъ того изъ двухъ острыхъ угловъ, коего вершина находится въ центрѣ окружности.

6. Перехожу къ треугольникамъ CAN, CAN', CAN'', и пр. Гипотенузы сихъ тр—ковъ суть *секансы* дугъ AM, AM', AM'', и пр., потому что *секансомъ дуги называется радіусъ, проведенный чрезъ одинъ ея конецъ и продолженный до пересѣченія съ касательною къ другому ея концу.* Части AN, AN', AN'', и пр., взятыя на неопредѣленной касательной AF, суть *тангенсы* дугъ AM, AM', AM'', и пр. Ибо *тангенсомъ дуги* согласились называть *часть касательной, содержащуюся между точкою прикосновенія и пересѣченіемъ съ секансомъ.*

7. Ежели чрезъ B, конецъ дуги AB (чер. 3), проведется касательная Bn до пересѣченія съ секансомъ CN; то Bn будетъ тангенсъ дуги BM, дополнительной для AB, и потому называется *котангенсомъ* дуги AM. Также Cn, секансъ дополнительной дуги BM, именуется *косекансомъ* дуги AM. Котангенсъ и косекансъ, какъ видно изъ чертежа, съ тангенсомъ и секансомъ не составляютъ однихъ и тѣхъ же треугольниковъ подобно синусу и косинусу.

8. Тангенсы и секансы съ синусами и косинусами имѣютъ весьма простыя отношенія, посредствомъ которыхъ взаимно

опредѣляются. Подобные треугольники CPM и CAN даютъ

$$CP : PM :: CA : AN,$$

отсюда

$$AN = \frac{PM \times CA}{CP}.$$

Изобразивъ радіусъ CA чрезъ R, найдемъ

$$tang\,AM = \frac{R\sin AM}{\cos AM}.$$

Изъ тѣхъ же треугольниковъ получаемъ

$$CP : CM :: CA : CN,\ CN = \frac{CA \times CM}{CP};$$

но $CN = sec AM$, $CM = CA = R$; слѣд.

$$sec\,AM = \frac{R^2}{\cos AM}.$$

9. Ежели сравнимъ между собою треугольники CAN, CBn, которые также суть подобные, поелику оба они прямоугольные и сверхъ того уголъ $ACN = CnB$; то получимъ пропорцію

$$AN : CA :: CB \text{ или } CA : Bn,$$

которая даетъ

$$Bn = \frac{\overline{CA}^2}{AN}, \text{ или } cot\,AM = \frac{R^2}{tang\,AM}.$$

И такъ *радіусъ есть среднее пропорціональное между секансомъ и косинусомъ, также между котангенсомъ и тангенсомъ*; ибо

$$\cos AM \times sec\,AM = R^2,\quad cot\,AM \times tang\,AM = R^2.$$