ТЕМА 3. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ РАБОТЫ НАД ТЕКСТОВЫМИ ЗАДАЧАМИ

Интерпретации понятия «задача» в современном научном знании

Рассматриваемое понятие является одним из фундаментальных в психологии, в кибернетике, в любой из наук естественно-математического цикла, в теории обучения и воспитания. В литературе, посвященной указанным отраслям знания, понятие это имеет разнообразные трактовки, поскольку в силу специфики той или иной научной дисциплины исследуются различные аспекты данного объекта.

В самом общем значении задача трактуется как поставленная цель, которую необходимо достигнуть; как вопрос, требующий разрешения на основании определенных знаний и логических умозаключений. Так, в «Словаре русского языка» С.И. Ожегова под «*задачей*» понимается «то, что требует исполнения, разрешения», либо «упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления». Такое объяснение в целом совпадает с житейскими ассоциациями на слово «задача», выясненными в ходе проведения опроса представителей различных социальных групп.

С *философской* точки зрения задача – это знание о незнании, возникающее в противоречии между субъектом и объектом, «проблема может возникнуть при контакте пассивного характера объекта и субъекта. Задача предполагает побуждение к активизации такого контакта, образовавшуюся внутри или возникшую извне потребность субъекта к устранению обнаруженного им противоречия».

В *психологической* литературе наиболее распространено употребление этого термина применительно к категории деятельности субъекта и условий ее протекания. Как пишет А.Н. Леонтьев, задача – это «цель, данная в определенных условиях».

Ю.М. Колягин в математической задаче выделяет такие *компоненты*:
- начальное состояние (условие задачи);
- конечное состояние (заключение задачи);
- решение (преобразование условия для нахождения искомого);
- базис решения (его теоретическое обоснование),

считая математическими все задачи, в которых переход от начального состояния к конечному осуществляется математическими средствами. К этой группе автор относит и чисто математические задачи, все компоненты которых являются математическими объектами, и прикладные математические задачи, решаемые математическим аппаратом.

В начальном курсе математики термин «задача» обычно используется в различных атрибутивных конструкциях – **«практическая задача», «арифметическая задача», «текстовая задача», «сюжетная задача», «математическая задача».** Так, в «Методике начального обучения» под редакцией А.А. Столяра и В.Л. Дрозда под текстовыми арифметическими задачами подразумеваются «задачи, имеющие житейское, физическое содержание и решаемые с помощью арифметических действий».

М.А. Бантова считает задачей жизненную ситуацию, связанную с числами и разрешимую счетом или арифметическими действиями. Л.П. Стойлова и А.М. Пышкало называют текстовой задачей описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие отношений между ее компонентами. Она состоит из условия, в котором сообщаются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекты, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними, и вопроса (требования), содержащего указание на то, что надо найти, и выраженного предложением в повелительной или вопросительной форме.

«Арифметической задачей называется вопрос, – пишет С.А. Пономарев, – для ответа на который приходится по двум или нескольким числам (данным) находить новое число (искомое)». М.И. Моро и А.М. Пышкало дают такое определение: «задача – это сформулированный словами вопрос, ответ на который может быть получен с помощью арифметических действий». А у Н.Б. Истоминой читаем, что арифметические задачи «формулируются в виде текста, в котором находят отражение количественные характеристики между реальными объектами». По замечанию Л.М. Фридмана и Е.Н. Турецкого, задача представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, учитывая те условия, которые указаны в задаче.

А.А. Свечников в понятие «математическая задача» вкладывает следующий смысл: «это связный, лаконичный рассказ, в который введены значения некоторых величин, зависимые от данных и связанные с ними определенными соотношениями, указанными в условии». Однако сам же замечает, что встречаются задачи без числовых данных, в которых требуется по указанным признакам и связям сделать логически выводимое умозаключение, или задачи, требующие выполнить доказательство на основе ранее известных определений и свойств. Рассматривая задачу в «узком» смысле (термин автора), А.А. Свечников выделяет в её составе следующие *элементы*:

- словесное изложение сюжета, в котором явно или в завуалированной форме указана функциональная зависимость между величинами, числовые значения которых входят в задачу;
- числовые значения величин, о которых говорится в задаче;
- задание, обычно сформулированное в виде вопроса, в котором предлагается узнать неизвестные значения одной или нескольких величин, называемых искомыми.

Оценивая определения понятия задачи в обозначенном контексте (применительно к начальному курсу математики), нетрудно заметить, что его связывают:

- с жизненной ситуацией;
- с вопросом;
- со способом изложения.

Трактуя задачу как жизненную ситуацию, авторы приведённых определений ограничивают тем самым содержание рассматриваемого понятия, и, как следствие этого, представления младших школьников о нём. Известно, что ученики испытывают трудности при выполнении заданий, связанных с отнесением какого-либо текста к задаче, в случае, если он не затрагивает реальных объектов. Это - во-первых.

Во-вторых, отождествление понятия задачи с понятием вопроса, по замечанию Ю.М. Колягина, «не только не правомерно, но и приводит к большой неопределённости в любой попытке использовать эти описания». Так, далеко не всякий вопрос является задачей в силу того, что для одного субъекта ответ может быть известен заранее, а для другого – непонятна сама постановка вопроса. Кроме этого, последний является одним из компонентов задачи, что отмечено всеми авторами при описании структуры рассматриваемого понятия, а поэтому не может использоваться в качестве родового по отношению к понятию «задача» при её определении.

И, наконец, действительно, всякая задача связана с языком, на котором она изложена, ибо оформлена в виде короткого и законченного текста, передающего её условие, но это лишь форма проявления задачи, причём далеко не единственная. Кроме словесной модели задачи выделяют еще знаковую (числовое выражение, уравнение, таблица, краткая запись с опорными словами), графическую (схема, чертеж, условный рисунок).

Подводя итог изложенному, можно сделать вывод, что представления о задаче носят авторский характер, зависят от области знания, которую они представляют, от их субъективных научных и философских воззрений. Используя этот термин в том или ином смысле, необходимо указывать, какое содержание приписывается автором понятию «задача», мнения каких исследователей он придерживается, с какими положениями вступает в противоречия.

Основным признаком задачи является временное отсутствие средств решения, т.е. невозможность осуществить решение с помощью установленной последовательности точно определенных операций, путем прямого применения известных схем. Это делает понятие задачи относительным: математический вопрос становится задачей лишь для человека, который еще не знает его решения.

О значении текстовых задач в начальном математическом образовании

Внимание специалистов к текстовым задачам определяется тем, что:

1. В их сюжетах находят отражение практические ситуации, знакомые ребенку, поэтому в рассуждениях он может опираться на свой жизненный опыт.
2. Задачи данной категории позволяют школьнику убедиться в прикладном характере математических методов, которыми он овладевает на уроках математики.
3. При их решении формируются общеучебные умения, необходимые для решения любой математической задачи, и навыки ориентировки в сложной ситуации, что позволяет считать задачи мощным инструментом развития человеческого интеллекта.
4. Для решения задач учащимся необходимо приложить определенные усилия, проявить волю, настойчивость, целеустремленность. Необычность приемов решения прививает вкус к самостоятельным исследованиям, к проявлению изобретательности, пробуждает положительные эмоции, как в процессе решения задач, так и при достижении результата.

Однако опыт свидетельствует о том, что идея воспитания познавательного интереса и самостоятельности, нравственных качеств личности и творческих задатков процессом решения сюжетных задач в учебную деятельность младших школьников может быть успешно реализована лишь тогда, когда у них возник интерес к данной задаче, устойчивая потребность решить ее.

Традиционно считается, что интересы младших школьников обусловлены занимательностью: привлекают внимание уроки с игровыми моментами, с преобладанием эмоционального материала. Занимательность обычно создается приключениями, неожиданными событиями, которые часто отвлекают от сути. Все неожиданное, броское вызывает детское любопытство, желание посмотреть, скорее даже рассмотреть, но только с внешней стороны, не вникая в существо вопроса. Эти чувства связаны с положительными эмоциями, но внимание быстро угасает, если не возбуждается желание идти дальше, понять природу события.

Присущие сюжетным задачам занимательность, яркость, необычность изложения и хода решения позволяют, на наш взгляд, преобразовать любопытство на более высокую стадию развития, поскольку являются «пусковым механизмом» детской любознательности. Удивление учащихся может быть направлено на весь спектр приемов, возможных способов решения задач, на их многообразие. Так на основе формирования и развития интереса к решению задач данного типа можно поддержать возникший у школьников интерес к изучению учебного предмета, к учебной деятельности и к ее результатам.

Использованию в практике преподавания текстовых математических задач предшествует большая подготовительная работа по их отбору. Поэтому необходимо сформулировать требования, на основе которых осуществляется отбор задач.

Эффективность обучения математике во многом обусловлена полнотой реализации возможных функций каждой конкретной задачи. Очевидно, что ценность задачи тем выше, чем больше функций может быть реализовано в процессе ее решения. В соответствии с основными целями математического образования (развитие, обучение, воспитание) ведущими функциями задач в обучении принято считать *развивающие, обучающие и воспитывающие*. Среди психологических аспектов роли математических задач, в том числе и сюжетных, выделяют их влияние:

- на приобретение способности учащихся осуществлять математическую деятельность;
- на формирование мышления обучаемых: они развивают их самостоятельность, активность, умение наблюдать, сравнивать, абстрагировать, анализировать и т.д.;
- на воспитание у школьников интереса к предмету и представления о математике как науке и ее отношении к действительности.

Обучающие функции текстовых задач направлены на формирование системы математических знаний, умений и навыков, в особенной степени навыков моделирования, формализации, рационализации, интерпретации полученных результатов. Трудно переоценить воспитательное значение учебной деятельности школьников, проявляющееся при решении задач. Именно здесь учащийся учится творчески мыслить, активно применять полученные знания, демонстрируя при этом определенные интеллектуальные, эмоциональные, волевые качества. Отмеченное позволяет обозначить некоторые ***особенности «хорошей задачи».***

1. Задача, предъявляемая младшему школьнику, должна быть *интересной* и *значимой* для ученика, должна вызвать его желание к исследованию за счет:

- элемента новизны или занимательности в фабуле задачи как благоприятного фактора возбуждения интереса учеников к математике и мотивирования их интеллектуального труда;
- реальности описываемой в задаче ситуации, числовых данных, постановки вопросов и полученного решения, близости жизненному опыту ребенка;
- неожиданного, оригинального решения, требующего применения известных методов в необычных условиях, рационализации и упрощения уже известного приема, поиска выхода из противоречия, обобщения известных понятий и операций, что имеет для ученика смысл, связанный с внутренними механизмами самой математики.

2. Вторая особенность «хорошей задачи» касается проблемы приспособления трудностей решения к возможностям учащихся начальных классов. Младший школьник должен не только хотеть, но и быть в состоянии решить предложенную задачу. Разочарование детей слишком трудными математическими вопросами является одной из причин торможения их развития. Нерешенная задача отрицательно влияет на воспитание интереса к математике. Поэтому очень важно, особенно на начальном этапе обучения предмету, чтобы поставленные перед школьниками нестандартные задачи были ими успешно решены. В этой связи, внедренные в содержание начального математического образования сюжетные задачи должны:

- соответствовать по объему элементов и по сложности их отношений уровню теоретических знаний и практическому опыту учащихся в целях обеспечения возможности самостоятельного их решения или хотя бы его понимания, «прочувствования»;
- иметь преимущественно лаконичные формулировки;
- допускать практическое решение (необходимым условием этого является наличие небольших числовых данных), а также разные варианты решения и способы проверки его правильности.

В то же время решение задачи не должно быть слишком легким, тривиальным, основанным на догадках, не требующих ни знаний, ни навыков практических действий.

3. Система задач для начальной школы должна включать в себя все основные темы курса, тем самым обеспечивая отработку необходимых, предусмотренных программой, знаний и умений, т.е. быть *полной*. Кроме этого структурные характеристики задачи должны быть разноплановы: с полным (или недостаточным) набором условий, с наличием избыточных, лишних условий и т.п. Это приучает не доверять внешнему облику задачи и не «бросаться» сразу решать ее, полагая, что внешний вид совпадает с действительным содержанием.

Итак, постановка задач в начальном математическом образовании должна быть таковой, чтобы прививать школьникам вкус к самостоятельным исследованиям и к проявлению изобретательности, вызывать положительные эмоции, как в процессе решения, так и при достижении результата.

Замечено, что возникающая в процессе решения сюжетных задач положительная мотивация влияет на приобретение учащимися способов учебнопознавательной деятельности. В массовой практике начального обучения у школьников формируется главным образом умение действовать по образцу в знакомой и несколько измененной ситуации. Хуже обстоят дела с применением умений осуществлять действия в нестандартной ситуации, т.е. таких умений, которые обеспечивают продуктивную, творческую деятельность. Текстовые задачи при правильной их постановке в школьном обучении являются важнейшим средством подготовки к такого рода деятельности.

В связи с тем, что учебная деятельность математического характера осуществляется в процессе решения различных задач, далее под учебными умениями, специфичными для математики, будем понимать *общие умения* решать задачи; для таких умений характерны универсальность и возможность переноса в другие сферы деятельности.

Следует отметить, что в традиционной практике преподавания математики под умениями решать задачи обычно понимают частные умения, направленные на решение конкретного вида задач, в то время как приобретение общих – более важный компонент, характеризующий высокий уровень развития мышления школьника и его математической осведомленности. Критика преподавания математики в начальных классах, в частности решения задач, часто связана именно с подменой формирования общих умений частными. Это значительно сужает операционное поле деятельности учащихся и при встрече с задачами, сколько-нибудь отличными от шаблонных, вызывает у них затруднения вплоть до стрессовой ситуации и отказа от решения. Недовольство таким положением дел высказывалось в методической литературе еще в начале века, однако проблема остается актуальной и ныне.

Какие умения, связанные с решением задач, выделяют отдельные методисты? Одни называют среди них умения понимать условие, анализировать его, делать чертеж, находить связь между данными и неизвестными, подбирать нужные приемы решения, переформулировать задачу, составлять план решения, контролировать процесс решения, изучать найденное решение, проверять его. Другие считают, что умение решать задачи складывается из следующих компонентов:

- умения читать задачу (понимать значение слов в ней, выделять опорные слова);
- умения различать условие и вопрос задачи, известное и неизвестное
- умения устанавливать связь между данными и искомыми;
- умения записывать решение и ответ задачи.

По мнению А.А. Свечникова, результатом решения задач в начальном курсе математики должно стать запоминание учащимися основных случаев применения каждого арифметического действия:

- умение выполнять различные операции над числами, определенные программой;
- умение соотносить числовые данные задачи с соответствующими величинами;
- устанавливать взаимосвязь между ними;
- намечать план решения в зависимости от содержания задачи;
- выбирать способ записи решения;

- самостоятельно находить пути решения любой незнакомой задачи, соответствующей по степени сложности тем задачам, которые уже решались на уроках в классе;
- умение решать задачи разными способами, основанными на знании свойств действий и зависимости между величинами;
- проверять решение;
- составлять несложные уравнения для решения задач;
- составлять свои задачи.

Авторы «Методики преподавания математики в 1-3 классах» М.И. Моро и А.М. Пышкало, утверждают, что решение любой задачи осуществляется посредством выполнения комплекса *общих приемов умственной деятельности*, таких как:

- анализ предложенной задачи, вычленение известного от неизвестного;
- установление связи между данными и искомым;
- составление плана решения;
- перевод зависимости между данными и искомым, выраженной в задаче словесно, на язык математических выражений, равенств, уравнений;
- выполнение соответствующих действий (решение уравнения) и получение ответа на вопрос задачи;
- проверка решения.

К числу основных мыслительных умений, функционирование которых характерно для процесса решения нестандартных для субъекта задач, по мнению Ю.М. Колягина, относятся следующие умения:

«1) *анализировать* задачную ситуацию с целью выявления существенного (выделять данные и неизвестные элементы, их свойства и отношения); с целью установления полноты (достаточности, недостаточности, избыточности) и независимости (или зависимости) условия задачи или ее элементов;

2) *соотносить* известные элементы задачи с неизвестными (данные с искомыми); *распознавать* известные элементы в различных (в том числе и новых) сочетаниях; *сопоставлять* данную задачу с известными задачами;

3) *выявлять* скрытые свойства задачной ситуации; реорганизовывать известные элементы для их функционирования в новом качестве, новых сочетаниях; *создавать* новые комбинации известных понятий и фактов, относящихся к элементам данной задачи, соотнося их с ее условием и целью;

4) *конструировать* простейшие математические модели данной задачной ситуации (а также графические, схематические и т.п. изображения задачи); *отождествлять* элементы задачи с элементами модели; *устанавливать* изоморфность модели и данной задачной ситуации в существенных для решения задачи свойствах и отношениях;

5) *обнаруживать* структуру данной задачной ситуации, задачи и ее элементов; *воспроизводить* эту структуру в различных состояниях; самостоятельно *разрабатывать* соответствующую микротеорию; *выявлять* детали, полезные с точки зрения общей структуры задачи или ведущей идеи поиска ее решения;

6) *осуществлять* мысленный эксперимент, *предвидеть* его промежуточные и конечный результаты; индуктивно *строить* гипотезы, *высказывать* разумные догадки; *расчленять* данную задачу на подзадачи

(последовательное решение которых приводит к решению основной), *выявлять* частные задачи (решение которых ведет к установлению элементов, важных для решения основной задачи);

7) *ограничивать* индуктивный поиск соображениями интуиции, логики и здравого смысла; *проверять* выдвигаемые гипотезы дедуктивным путем, *опровергать* контрпримером; скрупулезно, уверенно и грамотно *проводить* соответствующие выкладки;

8) *интерпретировать* результаты работы над моделью данной задачной ситуации; *кодировать* язык ситуации в терминах модели и *декодировать* (в терминах ситуации) результаты, выраженные на языке модели;

9) *оформлять* свои мысли (найденное решение задачи) кратко и четко (символически, текстом, графически и т.д.); наглядно *иллюстрировать* ведущие идеи;

10) критически *оценивать* результаты решения задачи с различных точек зрения (правильности, экономичности, эстетичности, значимости и т.д.); *обобщать* результаты решения задачи (или специализировать их); *исследовать* возможные частные и особые случаи;

11) эффективно осуществлять отбор полезной информации, содержащейся в самой задаче, процесс ее решения или его результатах; систематизировать эту информацию, соотнося ее с имеющимися знаниями и опытом».

На основании изложенного выделим группы общих умений, необходимых для решения математических задач, специфичных учебной деятельности младших школьников, которые могут быть экспериментально проверены и количественно оценены.

1. *Умения, связанные с пониманием и анализом условия задачи*:

- проверять принадлежность конкретного текста к группе задач;
- математизировать жизненные явления, описанные в задаче;
- выявлять отношения, в которых находятся компоненты задачи и соотносить данные элементы с искомыми;
- устанавливать полноту (достаточность, недостаточность, избыточность) и непротиворечивость данных задачи;
- расчленять задачу на подзадачи;
- переформулировать условие задачи;
- составлять различные виды краткой записи условия.

2. *Умения, связанные с составлением плана решения*:

- использовать схемы, таблицы, символы, чертежи, графы и т.п. в качестве вспомогательных моделей;
- мобилизовать память для актуализации имеющихся в распоряжении субъектов и необходимых для решения задач знаний в целях выбора способа решения и действий, его реализующих;
- переводить заданную ситуацию на язык математических отношений и зависимостей и, наоборот, символическое или графическое толкование задачи – на язык обыкновенного текста;
- проверять соответствие плана решения условию задачи;
- фиксировать план решения задачи.

3. *Умения, связанные с реализацией плана решения*:

- выбирать соответствующие содержанию задачи математические операции и правильно их выполнять;
- видеть вариативность решения задачи на основе знания условий, при которых это возможно;
- решать задачу разными способами;
- оформлять решение в различных формах и записывать ответ;
- исследовать возможные частные и особые случаи решения задачи.

4. *Умения, связанные с контролем*:
- опережающий контроль: прикидка, проверка реальности условия;
- текущий контроль: сопоставление условия и намеченного плана решения в процессе его реализации;
- итоговый контроль: выполнение проверки решения разными способами; оценивание результатов решения с точки зрения правильности, рациональности, красоты, значимости.

Этапы работы с текстовой задачей.

В практике начального обучения решение задач осуществляется в соответствии с методикой, предложенной американским педагогом-математиком Д. Пойа. Выделим этапы работы над задачей:

1 этап. Усвоение содержания задачи (цель этапа - понять задачу, выделить условие, требование, установить связи между данными и искомыми).

2 этап. Разбор задачи или поиск решения (цель этапа - составить план решения).

3 этап. Решение задачи (цель этапа - оформить решение, записать ответ).

4 этап. Проверка решения.

Установлено, что основные затруднения при решении задач данного вида возникают у учащихся прежде всего на начальных этапах хода решения, ибо попытки выбрать теоретический базис и способ действия, полагаясь на имеющийся субъектный опыт, в рассматриваемой ситуации не всегда успешны. Поэтому на *этапе усвоения содержания (осмысления условия) задачи* можно рекомендовать интерпретировать условие задачи, т.е. выполнить рисунок, чертеж, таблицу, схему для получения ясного представления о задачной ситуации; выделить данные и искомые, проверить их достаточность и непротиворечивость; обратиться к прошлому опыту: вспомнить аналогичные, уже решенные задачи, на которые данная задача может опираться; перевести элементы задачи на язык предполагаемого для использования при решении задачи какого-либо математического метода, переформулировать текст задачи (в случае деформированного текста или текста, осложненного лишними несущественными для решения задачи данными - например, качественными характеристиками объектов задачи).

При *составлении плана решения задачи* уместно попытаться определить тип задачи, свести ее к ранее решенным; видоизменить задачу, переформулировав условие и упростив его, отбросив несущественную, излишнюю информацию; заменив описание некоторых понятий соответствующими терминами; переорганизовав текст задачи в форму, удобную для поиска решения; расчленить задачу на серию вспомогательных задач, последовательное решение которых составит решение данной.

На этапе практической реализации намеченного плана решающему задачу полезно придерживаться советов, касающихся выбора способа оформления решения, гарантирующего фиксацию рассуждений в краткой и ясной, но достаточной для полного воспроизведения решения, форме; коррекции правильности решения путем сравнения с условием.

Закончив решение задачи, следует осуществить его *проверку*: прикинуть правильность результата сопоставлением с условием и здравым смыслом; попытаться найти более экономичный способ решения; исследовать особые случаи решения, решить задачу другим способом или методом, составить обратную задачу.

Остановимся подробнее на содержании **второго этапа,** поскольку в практике школьного обучения проблема дефицита учебного времени побуждает учителей к отказу от его реализации - после прочтения текста и его осмысления дети под руководством учителя сразу записывают решение. В результате, даже к концу обучения в начальной школе дети не овладевают умением самостоятельно осуществлять поиск решения. Это негативно сказывается на формировании обобщенных умений по решению задач - выпускники начальной школы ориентируются лишь в типовых задачах и испытывают затруднения в решении задач хоть, сколько-нибудь отличных от шаблонных.

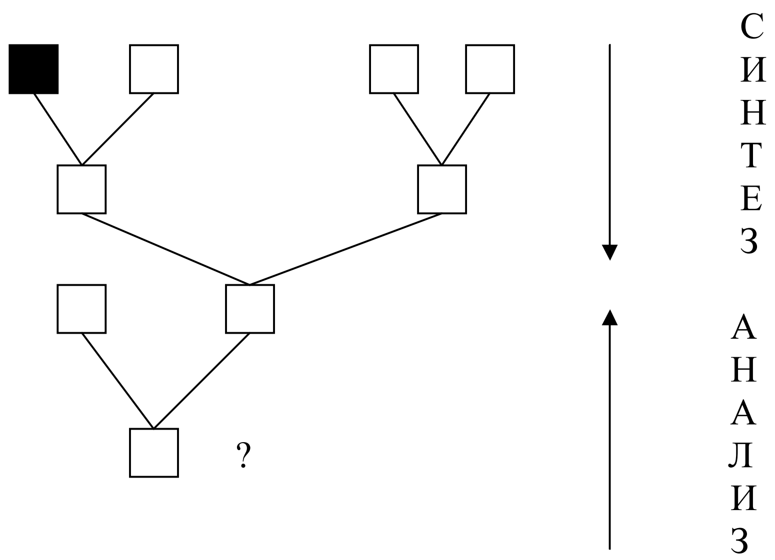
При целенаправленном ***поиске решения*** математических задач, широкое применение находят методы рассуждения от «начала» и «конца» задачи – *анализ и синтез*.

При решении текстовых задач с помощью аппарата арифметики суть *синтетического способа* рассуждения состоит в вычленении решающим простых задач из предложенной составной и их решении, то есть в сведении задачи к подзадачам. Овладеть данным методом рассуждения младшим школьникам может помочь прием деления конкретной задачи на смысловые части с последующим сравнением результатов проделанной операции (в первом случае простые задачи вычленяются произвольно, во втором – с ориентацией на вопрос исходной задачи).

Аналитический способ разбора характеризуется тем, что рассуждение начинается с вопроса задачи. Выясняется характер предварительных данных, необходимых для ответа на поставленный в условии вопрос. Здесь, как и в синтетическом способе, выделяются простые задачи, но рассуждение ведется в направлении, противоположном плану решения. Поэтому характер упражнений, обучающих умению осуществлять разбор задачи аналитическим методом, несколько иной: направлены они на подбор условий, соответствующих заданному вопросу.

В педагогике математики в целях обучения школьников вести разбор задачи аналитическим и синтетическим способами широко применяется методический прием, именуемый «деревом рассуждений»: по ходу разбора составляется «схема процесса мысли», помогающая учащимся увидеть и зафиксировать выделенные элементарные задачи и обозначить план решения, то есть облегчить организацию поиска решения.

Представим сказанное обобщенной графической схемой.



Заметим, что в практике обучения начальной математике к составлению плана решения подходят, как правило, с помощью аналитических рассуждений. Синтетический способ используют реже. Подобная тенденция не вполне оправдана, поскольку существуют задачи, применение аналитического метода разбора к условию которых не облегчает, а, напротив, затрудняет процесс поиска решения. Таковыми, например, являются задачи, в формулировке которых содержится несколько вопросов (тогда не совсем ясно, с какого из них начать вести рассуждения?); вопрос задачи может быть «спрятан» в условии или выражен повествовательным предложением, что само по себе уже является трудностью, позволяющей отнести так представленную задачу к нестандартным для младшего школьника. Кроме того, данный способ разбора предполагает и даже обязывает обратиться после его проведения к составлению плана решения синтетическим способом, что требует определенных временных затрат. При наличии же в условии задачи большого количества данных применение метода рассуждения «от начала» задачи (синтез) влечет за собой вероятность появления «лишних» новых величин, и, как следствие этого, увеличивается время поиска решения. Сказанное свидетельствует о необходимости при выборе способа разбора задачи ориентироваться на ее внешние признаки.

Если учащиеся владеют упомянутыми методами рассуждений, то в задаче в 2 – 3 действия они легко приходят к решению. В действительности же не все школьники младших классов умеют самостоятельно проводить нужные для такого разбора действия, тем более в ситуации решения нестандартной задачи. Учитывая это, обратим внимание на целесообразность использования приема, основанного на анализе известных компонентов задачи, выявлении возможных связей между ними и выборе из них тех, которые необходимы для решения. Прием этот более известен под названием «*метод исчерпывающих проб*»; в его основе – выявление всех логических возможностей и отбор из них таких, которые удовлетворяют условию задачи.

Приемы поиска решения задачи предлагаются учащимся в виде *памятки:*

- подумай, что обозначает каждое число в задаче; найди пары чисел, связанные между собой; составь из них выражения и объясни их смысл;

- из полученных выражений составь другие выражения и поясни их значение;

- из полученных выражений отбери нужные для решения задачи.

Обратимся к примеру.

Задача 1. *Доярки молочной фермы взяли обязательство за пастбищный сезон, продолжающийся 5 месяцев, получить от каждой коровы 3000 кг молока. Выполнят ли они свое обязательство, если будут надаивать от каждой коровы по 20 кг молока в день? (В месяце считать 30 дней).*

Конструкция текста данной задачи (условие – вопрос – условие) довольно сложная для восприятия, специального разъяснения требует вопрос, а городскому школьнику не очень ясен и сюжет.

Следуя памятке, переберем все возможные связи:

1) 3000 : 5 *– сколько молока нужно получить от каждой коровы за месяц;*

2) 20 * 30 *– сколько всего молока получат за один месяц;*

3) 30 * 5 *– сколько дней длится пастбищный сезон;*

4) 3000 : 20 *– сколько дней потребуется фактически.*

Из этих выражений следует несколько способов решения предложенной задачи:

I) *За сколько дней можно получить нужное количество молока? (имеется в виду количество дней в месяце)*

(3000 : 5) : 20 = 30 (дн.), 30 = 30.

II) *Сколько молока от каждой коровы нужно надаивать за день?*

(3000 : 5) : 30 = 20 (кг), 20 = 20.

III) *Сколько месяцев продолжается пастбищный сезон?*

3000 : (20 * 30) = 5 (мес.), или (3000 : 20) : 30 = 5 (мес.),
5 = 5. 5 = 5.

IV) *Сколько молока можно получить от каждой коровы, соблюдая определенные в условии требования?*

20 * (30 * 5) = 3000 (кг), или (20 * 30) *5 = 3000 (кг),
3000 = 3000. 3000 = 3000.

V) 1) 3000 : 5 = 600 (кг) *– должны получать в месяц от каждой коровы*;

2) 20 * 30 = 600 (кг) *– фактически получали*;

600 = 600.

VI) 1) 3000 : 20 = 150 *– дней потребуется фактически*;

2) 30 * 5 = 150 *– дней длится пастбищный сезон*;

150 = 150.

Такое тщательное изучение связей между количественными характеристиками величин полезно, так как позволяет полнее выявить скрытые в тексте задачи математические зависимости, проанализировать их и перевести на математический язык. Вместе с тем, в результате установления соответствий между одними и теми же данными можно получить разные способы решения задач. Приведенный пример подтверждает сказанное.

Для овладения описанным приемом учащиеся должны научиться:

- выполнять упражнения на составление выражений указанного смысла из данных задачи, типа: *предложен текст и дано задание поставить вопрос так, чтобы задача решалась сложением или вычитанием;*

- пояснять смысл уже составленных выражений согласно заданной ситуации, например, дано условие: *от проволоки длиной 15 м отрезали сначала 5 м, затем еще 7 м. Объясни, что узнаешь, выполнив действия: 15-5; 15-7; 5+7; 7-5; 15-(7+5).*

Составление таких упражнений не представляет большого труда для учителя, а опыт работы с ними поможет учащимся овладеть еще одним приемом поиска решения задачи.

Методы решения текстовых арифметических задач

Разрабатывая инструментарий решения математических задач, необходимо учитывать специфику учебного опыта младших школьников, отдавая предпочтение субъективно доступным средствам решения, поскольку объективное наличие более простого, с точки зрения науки, варианта решения не гарантирует целесообразности его применения на конкретной ступени обучения предмету.

В качестве основных в математике различают *арифметический* и *алгебраический* методы решения текстовых задач. В начальном курсе математики преобладает арифметический метод решения задач, аналитический применяется значительно реже в силу недостаточного опыта обращения учащихся с уравнениями.

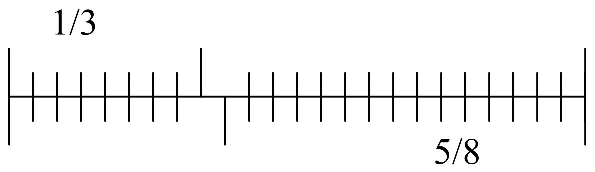
Несомненно, процесс алгебраического решения задач способствует формированию умственной дисциплины, но без предшествующего этапа арифметического рассуждения алгебраические приемы могут привести к буквенному и словесному формализму. Опыт арифметического решения задач дает возможность разъяснить школьникам не только формальную операционную сторону дела, но и показать содержательность аналитического метода.

Помимо указанных, в школьной практике используются и другие методы, позволяющие включить в содержание начального курса математики задачи, традиционно решаемые на следующих ступенях обучения. Это *графический и практический* метод, метод *подбора, последовательного или упорядоченного перебора,* метод «*предположение ответа*». Решение может быть оформлено в виде последовательности действий, в вопросно-ответной форме, в виде таблицы, чертежа, схематичного рисунка, графа.

Задача 1. *Из двух пунктов навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Первый проехал 1/3 пути, второй – 5/8 пути. Произошла ли встреча велосипедистов?*

Данная задача легко решается средствами арифметики: сложив две дроби и оценив полученное значение путем сравнения с единицей, ответим на вопрос задачи. Однако алгоритм сложения дробей с разными знаменателями изучается в курсе математики VI класса и младшему школьнику неизвестен. Тем не менее решение этой задачи вполне возможно осуществить и после изучения темы «Дроби» в начальном курсе математики.

Изобразим расстояние между пунктами отрезком, численное значение длины которого делится одновременно на 3 и на 8 – для конкретной задачи удобнее построить отрезок длиной 24 единичных отрезка.

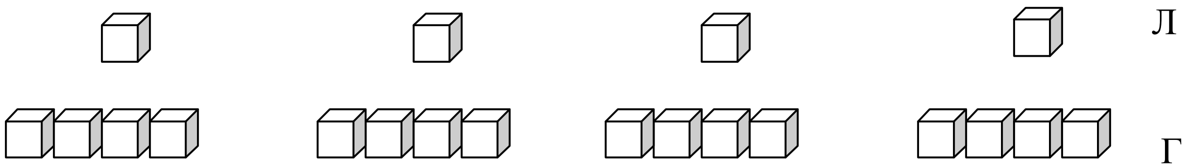


Опираясь на чертеж, можно сформулировать ответ: «Встреча не произошла». Такой способ решения называется *графическим*.

Некоторые задачи можно решить, выполняя действия с предметами – *практическим методом.*

Задача 2. *В гараже 20 автомашин – легковых и грузовых, причем на каждую легковую приходится 4 грузовые. Сколько легковых и сколько грузовых машин в гараже?*

Изобразим каждую машину символом. Известно, что на каждую легковую машину приходятся 4 грузовые. Поэтому каждому символу, обозначающему легковую машину, поставим в соответствие четыре таких же символа – грузовые машины.



Практическое решение задачи оформляется в виде *символического рисунка, схемы* или *таблицы*.

Задача 3. *Нужно рассадить 22 туриста в двухместные и четырехместные лодки. Сколько тех и других лодок потребуется, если общее их количество равно 8?*

Решение данной задачи может быть представлено последовательностью *символических рисунков*.

** ** ** ** ** ** ** **

Введя соответствующие обозначения и выполнив практические действия, пересчетом устанавливаем, что рассадили только 16 из 22 человек, поэтому еще шесть туристов разместили по двое (т.к. лодки были и четырехместные) в три первые лодки, указав таким образом их число. Остальные лодки – двухместные.

**** **** **** ** ** ** ** **

4-х местные 2-х местные

Табличный способ записи практического решения задачи проиллюстрируем в ходе решения следующей задачи.

Задача 4. *Имеются два сосуда вместимостью 3 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана ровно 4 л воды?*

Путем анализа условия задачи выясняем, что даны две мерки – *3 л* и *5 л* и неограниченное количество воды в водопроводном кране. Требуется, используя эти мерки, налить *4 л* воды.

Обозначим: а – водопроводный кран, в – пятилитровый сосуд, с – трехлитровый сосуд.

Один ход будем обозначать а – с. Первая буква показывает, откуда наливаем, вторая – куда переливаем. Емкость, куда переливаем, заполняется, если это возможно, полностью.

Решение:

№	Ход	в	С
1	а-в	5	0
2	в-с	2	3
3	с-а	2	0
4	в-с	0	2
5	а-в	5	2
6	в-с	4	3

Если условные обозначения не введены, то таблица имеет вид:

Ход	1	2	3	4	5	6
5л	5	2	2	-	5	4
3л	-	3	-	2	2	3

Ход	1	2	3	4	5	6	7	8
5л	-	3	3	5	-	1	1	4
3л	3	-	3	1	1	-	3	-

Нетрудно убедиться, что найденным решениям соответствуют следующие выражения, значение которых равно четырем:

$$5 – 3 + 5 – 3 \quad \text{и} \quad 3 + 3 – 5 + 3$$

Перечисленные методы решения математических задач в большей или меньшей степени имеют место в учебной деятельности младших школьников. Однако при решении сложных, нестандартных задач учащиеся чаще обращаются к методам *перебора (полной индукции)* и *подбора*.

Задача 5. *Можно ли найти два натуральных числа, из которых одно больше другого на 4, а их произведение равно 48?*

При решении этой задачи на начальной ступени рекомендуют воспользоваться методом *полной индукции* – рассмотреть все возможные варианты пар чисел, значение произведений которых равно 48, а затем выбрать подходящий (если таковой имеется).

Заметим, что математически данная задача решается составлением уравнения по ее условию $(x * (x + 4) = 48)$ и его решением.

Иногда перебор вариантов удобнее фиксировать в таблице.

Задача 6. *Мальчик на вопрос, сколько ему лет, отвечал, что через 13 лет ему будет в 4 раза больше, чем ему было два года назад. Сколько лет мальчику?*

Обозначим:

А – возраст в данное время;

Б – возраст два года назад;

В – возраст через 13 лет.

Возраст 1; 2 года не берем по смыслу задачи.

А	Б	В	В : Б	Ответ
3	1	3 + 13 = 16	16 : 1 > 4	—
4	2	4 + 13 = 17	17 : 2 > 4	—
5	3	5 + 13 = 18	18 : 2 > 4	—
6	4	6 + 13 = 19	19 : 4 > 4	—
7	5	7 + 13 = 20	20 : 5 = 4	+

При решении математических задач этим методом особое внимание нужно обратить на *способ подбора* чисел, отдавая предпочтение более рациональным.

Задача 7. *В коллекции есть шестиногие жуки и восьминогие пауки – всего восемь штук. Если пересчитать все ноги в коллекции, то их окажется 54. Сколько в коллекции жуков и сколько пауков?*

В данной задачной ситуации наиболее удачным следует считать подбор, начиная со среднего варианта – 4 жука и 4 паука. А затем, оттолкнувшись от полученного результата, выходят на решение. Менее удачным представляется *последовательный перебор* всех вариантов, особенно в случае с большими числовыми значениями известных величин.

Особо остановимся на методе решения линейных задач, который можно назвать «*предположением ответа*» (метод *«одного ложного предположения»*). Суть его в следующем. Выдвигается гипотеза: пусть ответ задачи будет таким-то. Путем рассуждений и вычислений проверяется принятая гипотеза: выполняются ли при ней условия задачи. В случае, когда оно не удовлетворяет условиям задачи, находят отклонение гипотезы от точного ответа: если отклонение отрицательно, т.е. гипотеза меньше ответа, оно прибавляется к гипотезе; если гипотеза больше ответа, т.е. отклонение положительно, то оно вычитается из гипотезы; если отклонения нет, гипотеза принимается за ответ задачи.

Задача 8. *Отец обещал сыну за каждую решенную правильно задачу опускать в копилку 10 пфеннигов. За каждую неправильно решенную задачу сын должен возвращать отцу по 5 пфеннигов. После того, как было решено 20 задач, у сына в копилке оказалось 80 пфеннигов. Сколько задач сын решил неправильно и сколько без ошибок?*

Предположим, что 10 задач решено верно. Узнаем, сколько денег в копилке окажется при этом: *10*10 - 5*10 = 50* пфеннигов. Получили, что *50 < 80* (отклонение отрицательно). При принятой гипотезе количество денег бы уменьшилось на *80 - 50 = 30* пфеннигов. За каждую правильно решенную задачу вернем по *10+5 = 15* пфеннигов. Теперь узнаем, на сколько принятая гипотеза меньше истинного ответа: *30:15 = 2* задачи, поэтому количество задач, решенных без ошибок составит *10+2 = 12* задач, а неправильно решенных *10 - 2 = 8* или *20 -*

12 = 8 задач. Способом установления соответствия между данными и искомыми легко определяется правильность решения предложенной задачи: *10*12 - 5*8 = 80* пфеннигов.

Несмотря на ограниченность описанных способов решения задач, ознакомление с ними учащихся позволяет ввести в практику обучения начальной математике задачи, решение которых традиционно осуществлялось только в режиме внеклассных мероприятий – кружков и олимпиад. Конечно, может встретиться задача, для решения которой ни один из известных приемов не окажется пригодным: искусство решения задач и состоит в конструировании новых способов и приемов.

Методика обучения решению задач с долями и дробями

В начальном курсе математики знакомство с дробями носит пропедевтический характер. Перед учителем стоит задача:

- познакомить детей с получением вначале долей, а затем и дробей практическим путем;
- ввести соответствующие обозначения и названия;
- рассмотреть решения задач, связанных с этими понятиями.

Здесь необходимо организовать деятельность детей так, чтобы каждый ребенок, выполняя практические действия с соответствующим дидактическим материалом, получил полные четкие представления о том, как образуются соответствующие доли.

В качестве дидактического материала целесообразно использовать геометрические фигуры: круги, квадраты, прямоугольники, треугольники. Организуя практическую деятельность детей подводим их к пониманию того, что для получения какой-то доли нужно данный объект разделить на соответствующее число равных частей.

При этом дается название соответствующей доли и, если этого требует программа, вводятся и соответствующие обозначения.

Например, работа может быть построена следующим образом.

На этапе актуализации знаний используются упражнения на деление множеств предметов на части, в том числе и равные; на уравнивание частей, типа:

- *У Кати на 10 конфет больше, чем у Пети. Сколько конфет Катя должна отдать Пете, чтобы конфет было поровну? (5).*

- *У Кати 10 конфет. Она поделилась с Петей. Сколько конфет стало у каждого?* (Здесь рассматривались разные варианты, но лучший, когда поровну).

Решение: 10 : 2 = 5 (к.)

- *У Кати 1 яблоко. Она хочет поделиться с Петей. Что ей для этого надо сделать?* (разделить (разрезать) яблоко и опять останавливаемся на делении яблока на 2 равные части; одну половину отдать Пете).

Деление яблока демонстрируется классу, подчеркивается при этом: *целое яблоко, 2 равные части, 1 часть – половина, в целом яблоке – 2 половины.* Далее вводится название – одна вторая доля яблока, затем обозначение $\frac{1}{2}$, поясняется: *яблоко разделили на 2 равные части и взяли 1 такую часть.*

После этого целесообразно организовать практическую работу с учащимися, в ходе выполнения которой школьники получали бы $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ доли круга или квадрата.

Наряду с этим должны быть другие задания, когда уже разделили фигуры на сколько-то равных частей. Перед детьми ставится вопрос – узнать какая это часть фигуры? Почему так считают?

С этой целью наряду с раздаточным материалом для организации практических работ необходимо использовать и таблицы.

С детьми следует рассмотреть и вопрос сравнения долей. Сравнивать можно только доли одной фигуры, причем полученные одним и тем же способом.

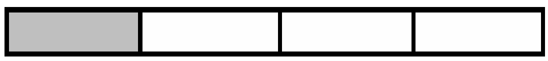
Сравнение долей выполняется только экспериментально (без правил, обоснований): можно только посмотреть, или путем наложения.

С долями величины связано и решение задач двух видов:

- задачи на нахождение доли от величины;
- задачи на нахождение числа по величине доли.

При рассмотрении задач этих видов следует опираться на знания детей о долях (они должны уметь получить практически любую долю).

Задача. *От ленты длиной 8 м отрезали $\frac{1}{4}$. Какой длины ленту отрезали?*



- Сколько отрезали? ($\frac{1}{4}$).
- Что для этого надо сделать?
- Отделите $\frac{1}{4}$ и отрежьте.
- Сколько получили?
- Представьте ситуацию, что ленты нет, а надо узнать, какой длины ленту отрезали. Что мы должны сделать?

Учащиеся приходят к выводу, что длина также разделилась на 4, следовательно, надо выполнить действие деление.

- На сколько надо разделить? (На 4 равные части).

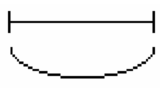
8:4=2 (м).

При решении задач второго вида на нахождение числа по величине дроби, мы также опираемся на представления и знания детей о получении долей.

Пример. *От ленты отрезали 2 м, что составляет $\frac{1}{3}$ длины всей ленты. Какова длина всей ленты?*

Изображаем, что нам известно.

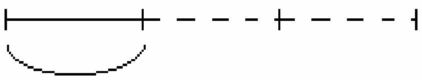
$\frac{1}{3}$



2 м

Уточняем, что нужно узнать (длину всей ленты). Выясняем, сколько третьих долей содержится в целой ленте (три). Дополняем рисунок

$\frac{1}{3}$



2 м

Отсюда явно видно, что для определения длины всей ленты надо 2 м умножить на 3.

2·3 = 6 (м).

Методика изучения дробей

В начальных классах дробь рассматривается как одна или несколько долей (частей).

- Найдите $\frac{1}{4}$ часть квадрата, закрасьте ее.
- Сколько осталось незакрашено? ($\frac{3}{4}$). Получили дробь $\frac{3}{4}$.

Надо рассмотреть, что обозначает каждая цифра в записи, если предусмотрено учебником, ввести термины «числитель», «знаменатель».

При изучении дробей также рассматриваются вопросы сравнения дробей, однако эта работа носит иной характер. Для сравнения дробей предполагается использовать в виде наглядности соответствующие таблички.

<table>
<tr><td colspan="8">1</td></tr>
<tr><td colspan="4">1/2</td><td colspan="4">1/2</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/4</td><td colspan="2">1/4</td><td colspan="2">1/4</td><td colspan="2">1/4</td></tr>
<tr><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td><td>1/8</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="18">1</td></tr>
<tr><td colspan="6">1/3</td><td colspan="6">1/3</td><td colspan="6">1/3</td></tr>
<tr><td colspan="3">1/6</td><td colspan="3">1/6</td><td colspan="3">1/6</td><td colspan="3">1/6</td><td colspan="3">1/6</td><td colspan="3">1/6</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td><td colspan="2">1/9</td></tr>
</table>

Детям предлагаются упражнения различного характера с использованием таблиц.

Например.

1. *Сравнить:* $\frac{3}{4}$ *и* $\frac{1}{2}$.

2. *Вставьте число в окошко, чтобы равенство было верным* $\frac{4}{12} = \frac{\square}{6}$.

В дальнейшем продолжается работа по решению задач на нахождение части числа и на нахождение числа по величине части. Эти задачи не предусматривают выполнения действий над дробями.

Например: *Расстояние между городами 500 км. Поезд проехал* $\frac{2}{5}$ *этого пути. Какое расстояние проехал поезд?*

Находим, сколько километров составляет $\frac{1}{5}$ всего пути, а затем и $\frac{2}{5}$, то есть 200 (км). Решение записывается по смыслу получения дроби.

500 : 5 · 2 = 200 (км).

Ответ: 200 км.