МАТЕМАТИКА

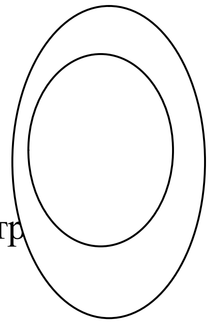
Примеры решения заданий по темам, не изучаемым в школе

ДИСКРЕНАЯ МАТЕТАТИКА

1.1. Множества. Способы заданий множеств.

1. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера высказывание: «Все учащиеся 5 класса присутствовали на школьной спартакиаде».

Решение: Выделим множества, о которых идет речь в высказывании: это множество учащихся некоторой школы (обозначим его за A), и множество учащихся 5 класса (обозначим его B). В данном высказывании утверждается, что все элементы множества B являются также и элементами множества A. По определению отношения включения это означает, что $B \subset A$. Поэтому множество B надо изобразить внутр изображающего множество A.



2. Задайте множество другим способом (если это возможно):

а) $A = \{x | x \in N, x \leq 9\}$; б) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;

в) $A = \{x | x \in R, x^2 - 3 = 0\}$.

Решение: а) Элементами множества A являются натуральные числа, которые меньше 9 и само число 9, значит, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

б) $A = \{x | x \in Z, |x| \leq 4\}$ – множество целых чисел, модуль которых не больше четырех;

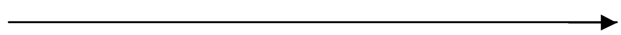
в) Элементами множества A являются корни уравнения $x^2 - 3 = 0$, значит, $A = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

3. Изобразите на координатной прямой перечисленные множества:

а) $A = \{x | x \in R, -1{,}5 \leq x \leq 6{,}7\}$; б) $M = \{x | x \in N, 4x - 14 < 0\}$;

в) $C = \{x | x \in Z, -5 < x < 2\}$; г) $H = \{x | x \in Z, |x| < 7\}$.

Решение: Ответы показаны на рисунке:



а) $A = [-1{,}5; 6{,}7]$

б) $M = \{1, 2, 3\}$

в) $C = (-5; 2)$

г) $H = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. Задайте числовое множество описанием характеристического свойства элементов: а) $(0; 11)$; б) $[-12{,}3; 1{,}1)$; в) $[-5; 3]$; г) $(-\infty; -102{,}354]$.

Решение:

а) $A = \{x | x \in R, 0 < x < 11\}$; б) $C = \{x | x \in R, -12{,}3 \leq x < 1{,}1\}$;

в) $A = \{x | x \in R, -5 \leq x \leq 3\}$; г) $P = \{x | x \in R, x \leq -102{,}354\}$.

5. Даны множества:

а) $К = \{y | y = 1,$ *если* $y \in N,$ *то* $y + 1 \in N\}$, $У = \{y | y \in Z, y > 0\}$;

б) $К = \varnothing$, $У = \{\varnothing\}$;

в) $К = \{c, n, p\}$, $У = \{\{c, n\}, p\}$.

Равны ли множества $К$ и $У$?

Решение:

а) Данные множества равны (*К*=*У*), т.к. любой элемент *у* из множества *К* принадлежит и множеству *У*, и, наоборот, любой элемент *у* из множества *У* принадлежит множеству *К*;

б) Нет не равны, т.к. множество *К* пустое, а множество *У* состоит из одного элемента (пустого множества);

в) Нет не равны, т.к. множество *К* состоит из трех элементов, а множество *У* – из двух. Причем два элемента из множества *К* (*с* и *п*) не принадлежат множеству *У*, а элемент из множества *У* (множество *{с, п}*) не принадлежит множеству *К*.

6. *А* – множество лиственных деревьев. Найдите: а) множество, подмножеством которого является множество *А*; б) два подмножества данного множества.

Решение: а) *Р* – множество растений ($A \subset P$), т.к. любое лиственное дерево является растением; б) *Е = {березы, осины, клены, рябины}* ($E \subset A$); *С={дубы, осины, тополя}* ($C \subset A$). Возможны другие ответы.

7. Дано множество *А = {а, с, р, о}*. Выпишите все подмножества данного множества.

Решение: Собственные подмножества: $\{a\} \subset A$, $\{c\} \subset A$, $\{p\} \subset A$, $\{o\} \subset A$, $\{a, c\} \subset A$, $\{a, p\} \subset A$, $\{a, o\} \subset A$, $\{c, p\} \subset A$, $\{c, o\} \subset A$, $\{p, o\} \subset A$, $\{a, c, p\} \subset A$, $\{a, c, o\} \subset A$, $\{c, p, o\} \subset A$. Несобственные: $\{a, c, p, o\} \subset A$, $\varnothing \subset A$.

8. *Х* – множество млекопитающих, *Н = {львы, тигры, волки, лисы}*, *М = {медведи, волки, орлы, страусы, обезьяны, киты}*. Какие из данных множеств являются подмножеством множества *Х*? Изобразите данные множества с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Решение: Множество *М* не является подмножеством множества *Х*, т.к. орлы и страусы – птицы, а не млекопитающие. Данные множества показаны на рисунке 4:

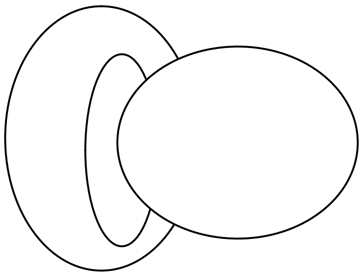


Рис.4

9. Какие из следующих множеств пусты: а) Множество людей на Марсе; б) множество городов России с населением более 1 млн.; в)множество европейских государств, название которых начинается с буквы Е; г) множество натуральных чисел, меньших 1?

Решение: Пустые множества а, в, г.

10. Установите, принадлежат ли множеству $B = \{x |\ x=(n^2 + 9)/n^2,\ n \in N\}$, числа 2, 5, -7?

Решение:

1) Чтобы установить, принадлежит ли число 2 множеству *В*, нужно определить, существует ли такое натуральное число *n*, при котором $(n^2 + 9)/n^2 = 2$. Для этого следует решить уравнение $(n^2 + 9)/n^2 = 2$. Решая это

уравнение, находим два корня n_1 = -3, n_2 = 3. Так как $3 \in N$, следовательно, такое натуральное число существует, поэтому $2 \in B$.

2) Запишем уравнение $(n^2 + 9)/n^2 = 5$. Решаем его: $n^2 + 9 = 5n^2 \Rightarrow 4n^2=9 \Rightarrow n^2=3/2 \Rightarrow n=\pm\sqrt{3/2}$. Полученные числа не являются натуральными. Значит число $5 \notin B$.

3) Равенство $(n^2 + 9)/n^2 = -7$ невозможно ни при каком натуральном n, т.к. при любом натуральном n значение выражения $(n^2+9)/n^2$– положительное число, которое не равно отрицательному числу. Значит, $-7 \notin B$.

1.2. Операции над множествами

1. Найдем пересечение множеств $A = \{a, b, c, d, e\}$ и $B = \{b, d, e, g, к\}$.

Решение: Обоим множествам принадлежат элементы *b, d, e.*

Поэтому $A \cap B = \{b, d, e\}$.

2. Найдем объединение и разность множеств A и B, если

$A = \{ x|\ -2/5 \le x \le 7/3\}$, $B = \{ x|\ -1/4 \le x \le 3\}$.

Решение. Если изобразить данные множества на числовой прямой, то объединение $A \cup B$ есть часть оси, где имеется хотя бы одна штриховка, т.е. отрезок [-2/5; 3]. Иначе говоря, $A \cup B = \{ x|\ -2/5 \le x \le 3\}$.

Разность $A \backslash B$ есть часть отрезка, изображающего множество A, отмеченная лишь одной штриховко, т.е. полуинтервал [-2/5; -1/4), точка -1/4 принадлежит B и поэтому не принадлежит $A \backslash B$. Другими словами,

$A \backslash B = \{ x|\ -2/5 \le x < -1/4\}$.

3. Известно, что A – множество учащихся, увлекающихся историей, B – множество учащихся, интересующихся биологией. Сформулируйте условия, при которых: а) $A \cup B = B$; б) $A \cap B = \varnothing$.

Решение: а) выясним, в каком отношении находятся множества A и B. Известно, что $A \cup B = B$, в том случае, когда $A \subset B$, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B. Таким образом, $A \cup B = B$, если все учащиеся, увлекающиеся историей, увлекаются и биологией;

б) Исходя из равенства $A \cap B = \varnothing$ множества A и B не пересекаются, т.е. они не имеют общих элементов. Поэтому $A \cap B = \varnothing$, если все учащиеся, увлекающиеся историей, не интересуются биологией.

4. Укажите характеристическое свойство элементов множества $X = A \cup B'_R \cap C$, если $A = \{ x|\ 1 \le x \le 7\}$, $B = \{x|\ 3 < x < 5\}$, $C = \{x|\ 0 \le x < 4\}$

Решение: Учитывая соглашение о порядке выполнения операций, сначала находим B'_R, затем $B'_R \cap C$ и, наконец, $A \cup B'_R \cap C$. С этой целью изобразим множество B на координатной прямой (рис. 12а). По определению дополнения множество B'_R состоит из всех чисел, не принадлежащих B (рис. 12б). Пересечением этого множества с множеством С будут числа, общие для B'_R и C, т. е. числа, содержащиеся в промежутке [0; 3] (на рисунке 12в это область с двойной штриховкой).

Далее находим объединение множества A с полученным множеством

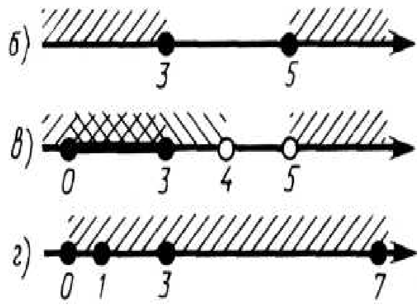


Рис. 2

[0; 3]. Из рисунка 12г видно, что $A \cup B'_R \cap C$ представляет собой промежуток [0; 7]. Таким образом, $X = \{ x| \ 0 \le x \le 7\}$.

5. Доказать, что если A и B подмножества в U и $A \subset B$, то $A' \supset B'$.

Доказательство. A' – дополнение к A в универсальном множестве U, B' – дополнение к B в U. Пусть $x \in B' \Rightarrow x \notin B$ (по определению дополнения) $\Rightarrow$ $x \notin A$, так как по условию $A \subset B$. Таким образом, $x \in A'$, т.е. всякий элемент множества B' является элементом множества A', значит, $B' \subset A'$.

6. Доказать справедливость равенства: $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Доказательство.

1. Покажем, что первое множество является подмножеством второго. Возьмем $\forall x \in (A \setminus B) \setminus C$. Тогда: $x \in (A \setminus B)$ и $x \notin C$ (по определению вычитания)

$$\Downarrow$$

$$x \in A \text{ и } x \notin B$$

а) Если $x \in A$ и $x \notin C$, то $x \in A \setminus C$.

б) Если $x \notin B$ и $x \notin C$, то $x \notin B \setminus C$.

Из пунктов а) и б) следует, что $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, т.е.

$(A \setminus B) \setminus C \subset (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

2. Покажем, что второе множество является подмножеством первого. Возьмем $\forall y \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Тогда: $y \in (A \setminus C)$ и $y \notin (B \setminus C)$ (по определению вычитания)

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$y \in A$ и $y \notin C$ $\qquad$ $y \notin B$ и $y \notin C$

Таким образом, $y \in A$ и $y \notin B \Rightarrow y \in (A \setminus B)$, так как $y \notin C$, то $y \in (A \setminus B) \setminus C$, т.е. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \setminus C$.

3. Итак, $(A \setminus B) \setminus C \subset (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus B) \setminus C$ следовательно, множества равны. Что и требовалось доказать. ▲

7. Доказать, что для любых множеств A и B верно равенство $(A' \cap B)' = A \cup B'$.

Решение: Возможны два способа доказательства данного утверждения.

I способ. Известно, что $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Применим эту формулу к выражению $(A' \cap B)'$. Получим: $(A' \cap B)' = (A')' \cup B'$.

Но поскольку $(A')' = A$, то имеем: $(A')'\cup B' = A\cup B'$. Таким образом, $(A'\cap B)' = A\cup B'$.

II способ. В основе его лежит определение равных множеств: $X = Y$ тогда и только тогда, когда $X\subset Y$ и $Y\subset X$.

а) Докажем, что $(A'\cap B)'\subset A\cup B'$.

Пусть $x \in (A'\cap B)'$.

$\Downarrow$

$x\notin A'\cap B$ (по определению дополнения подмножества)

$\Downarrow$

$x\notin A'$ и $x\notin B$ (по определению пересечения множеств)

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x\in A$ $x\in B'$ (по определению дополнения подмножеств)

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x\in A\cup B'$ $x\in A\cup B'$(по определению объединения множеств).

Таким образом, из того, что $x\in(A'\cap B)'$, следует, что $x\in A\cup B'$.

б) Докажем, что $A\cup B'\subset(A'\cap B)'$.

Пусть $y\in A\cup B'$.

$\Downarrow$

$y\in A$ или $y\in B'$ (по определению объединения множеств)

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y\notin A'$ $y\notin B$ (по определению дополнения подмножества)

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y\notin A'\cap B$ $y\notin A'\cap B$ (по определению пересечения множеств)

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y\in(A'\cap B)'$ $y\in(A'\cap B)'$ (по определению дополнения).

Таким образом, из того, что $y\in A\cup B'$, следует, что $y\in(A'\cap B)'$.

в) Итак, $(A'\cap B)'\subset A\cup B'$, $A\cup B'\subset(A'\cap B)'$. Исходя из определения равных множеств, заключаем, что $(A'\cap B)' = A\cup B'$. Что и требовалось доказать. ▲

1.3. Разбиение множества на классы

1. X – множество треугольников, A, B и C – его подмножества. Можно ли говорить о разбиении множества X на классы A, B и C, если:

а) A – множество остроугольных треугольников, B – множество тупоугольных треугольников, C – множество прямоугольных треугольников;

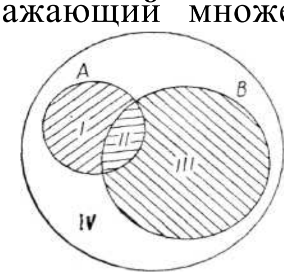
б) A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество разносторонних треугольников?

Решение: а) Чтобы дать положительный ответ на поставленный вопрос, необходимо убедиться в том, что оба условия разбиения множества X выполнены. Множества A, B и C попарно не пересекаются: не существует треугольников, являющихся одновременно остроугольными и тупоугольными, так же как и треугольников, являющихся одновременно тупоугольными и прямоугольными, остроугольными и прямоугольными. Если же объединить множество остроугольных треугольников с множеством тупоугольных и множеством прямоугольных треугольников, то получим множество всех треугольников, т. е. множество X.

Итак, множество всех треугольников можно разбить на остроугольные, тупоугольные и прямоугольные.

б) Проверим, выполнены ли в данном случае условия разбиения. Так как среди равнобедренных треугольников есть равносторонние (множество равносторонних треугольников является подмножеством множества равнобедренных треугольников), то множества A и B пересекаются, а, значит, первое условие разбиения не выполнено. Следовательно, множество треугольников нельзя разбить на классы равнобедренных, равносторонних и разносторонних треугольников.

2. Из множества X треугольников выделили два подмножества: A – множество равнобедренных треугольников и B – множество тупоугольных треугольников. Построить круги Эйлера для данных множеств и установить, на сколько непересекающихся областей разобьется круг, изображающий множество X. Какие множества изображаются этими областями?



Решение: Так как A и B – подмножества множества X, то круги, изображающие множества A и B, рисуем внутри круга, изображающего множество X. При этом учитываем, что множества A и B пересекаются (рис. 18). Видим, что круг, изображающий множество X, разбился на 4 не пересекающиеся области (на рис. 18 они выделены штриховкой и пронумерованы). Область I изображает множество равнобедренных треугольников, не являющихся тупоугольными; область II – множество треугольников, являющихся равнобедренными и тупоугольными; область III – множество тупоугольных треугольников, не являющихся равнобедренными; область IV – множество треугольников, не являющихся ни равнобедренными, ни тупоугольными. Таким образом, множество X разбилось на 4 попарно непересекающихся множества, представленных областями I, II, III, IV на рис. 18.

Заметим, что в рассмотренном примере классификация треугольников была осуществлена при помощи двух свойств: «быть равнобедренным треугольником» и «быть тупоугольным треугольником».

3. Из множества четырехугольников (Q) учащийся выделил подмножество трапеций (A), параллелограммов (B), квадратов (C). Произошло ли разбиение множества четырехугольников на попарно непересекающиеся классы A, B и C?

Решение: Видим, что при таком разбиении не выполняются 1-е и 2-е условия. Во-первых. $A \cup B \cup C \neq Q$, потому, что существуют четырехугольники, которые не являются ни трапециями, ни параллелограммами, ни квадратами; во-вторых: $B \cap C \neq \varnothing$, т.к. некоторые параллелограммы являются квадратами.

4. Множество целых чисел Z разбили на три подмножества: P – множество целых положительных чисел; S – множество целых отрицательных чисел; $E = \{0\}$. Произошло ли разбиение множества Z на попарно непересекающиеся классы P, S и E?

Решение: Да, произошло, т.к.:

1) $P \cap S = \varnothing;$ $S \cap E = \varnothing;$ $E \cap P = \varnothing;$

2) $P \cup S \cup E = Z;$

3) $P \neq \varnothing;$ $S \neq \varnothing;$ $E \neq \varnothing.$

Все три условия разбиения выполнены.

5. Дано множество $X = \{-14, -13, -12, -11, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$. Выделите в данном множестве три попарно-непересекающихся класса.

Решение: Данная задача имеет два способа решения. *Первый способ.* Множество можно разбить на три класса без условий. Например, $X_1 = \{-14, -13\}$, $X_2 = \{-12, -11, 10, 11, 12\}$, $X_3 = \{13, 14, 15, 16, 17\}$. *Второй способ* (с условием). X_1 – множество всех чисел, которые при делении на 2 дают в остатке 0 ($X_1 = \{-14, -12, 10, 12, 14, 16\}$), X_2 – множество всех чисел, которые при делении на 2 дают в остатке 1 ($X_2 = \{-13, -11, 11, 13, 15, 17\}$).

6. Из 27 студентов 18 изучают французский язык, а 15 - английский. Сколько человек изучают оба языка?

Решение: Пусть $Ф$ – множество студентов, изучающих французский язык, A – английский язык, тогда $Ф \cap A$ – множество студентов, изучающих оба языка. По условию $n(Ф \cap A) = 27$, $n(Ф) = 18$, $n(A) = 15$. Необходимо найти $n(Ф \cap A)$. По формуле $n(Ф \cap A) = n(Ф) + n(A) - n(Ф \cap A)$ имеем: $n(Ф \cap A) = 18 + 15 - 27 = 6$, т.е. оба языка изучают 6 студентов.

7. В классе 18 учащихся увлекаются химией, а 13 – географией. Каким может быть число учащихся, увлекающихся: а) обоими предметами; б) хотя бы одним предметом; в) только одним предметом?

Решение. Пусть X – множество учащихся, увлекающихся химией, G – географией, тогда $X \cap G$ – множество учащихся, увлекающихся обоими предметами. По условию $n(X) = 18$, $n(G) = 13$ и $n(X \cup G) + n(X \cap G) \leq 31$. Если множества X и G не пересекаются, то $n(X \cap G) = 0$, если же все учащиеся, увлекающиеся географией, увлекаются и химией, то $n(X \cap G) = 13$. Значит, число учащихся, увлекающихся обоими предметами, изменяется от 0 до 13, т.е. $0 \leq n(X \cap G) \leq 13$. Отсюда не трудно определить, что число учащихся, увлекающихся хотя бы одним предметом, изменяется от 18 до 31, а увлекающихся только одним предметом – от 18 - 13 = 5 до 31.

8. Из 50 студентов курса 42 изучают английский язык, 31 – немецкий язык, а 25 – английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение: Пусть A – множество студентов курса, изучающих английский язык, H – множество студентов курса, изучающих немецкий язык, C – множество всех студентов курса. По условию задачи $n(A) = 42$, $n(H) = 31$, $n(A \cap H) = 25$, $n(C) = 50$. Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ.

1) Найдем число элементов в объединении данных множеств. Для этого воспользуемся формулой:

$$n(A \cup H) = n(A) + n(H) - n(A \cap H) = 42 + 31 - 25 = 48.$$

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: 50 - 48 = 2.

2 способ.

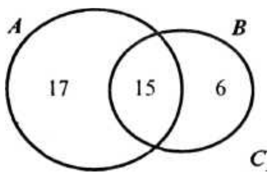
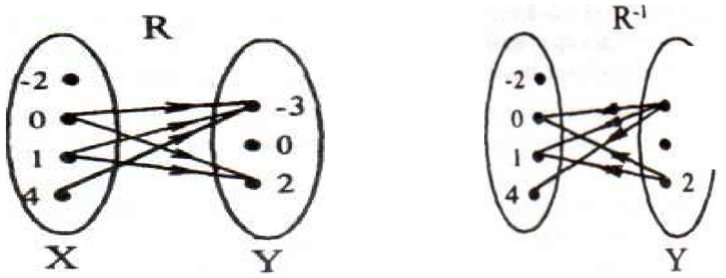


Рис.19

Изобразим данные множества при помощи кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств Так как в пересечении множеств A и H содержится 25 элементов, то студентов изучающих *только* английский язык (42 - 25 = 17), а студентов, изучающих *только* немецкий, - 6 (31 - 25 = 6). $n(A \cup H) = 17 + 25 + 6 = 48$, и, следовательно, число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни языки, будет 50 - 48 = 2.

1.4. Соответствия между множествами

1. Соответствие S между множествами X и Y задано при помощи графа (рис. 38). Укажите: область отправления, область прибытия, область определения и множество значений соответствия S; его график. Постройте график соответствия R в декартовой системе координат. Задайте с помощью графа соответствие S^{-1}, обратное данному, и соответствие S', противоположное данному. Постройте графики соответствий S^{-1} и S' в декартовой системе координат.



R

а) *б)* *в)*

Рис.38

<u>Решение:</u> Из чертежа следует, что областью отправления соответствия S является множество $X = \{-3, 0, 1, 5\}$, область прибытия – множество $Y = \{-2, 0, 4\}$. Область определения образуют числа, из которых выходит хотя бы одна стрелка, т.е. $D_S = \{0, 1, 5\}$ ($D_S \in X$); область значений $E_S = \{-2, 4\}$ ($E_S \in Y$). Каждая пара чисел, принадлежащая графику данного соответствия, на графе соединена стрелкой. Поэтому график соответствия S – множество пар $\{(0, -2), (0, 4), (1, -2), (1, 4), (5, -2), (5, 4)\}$. Изобразив каждую пару чисел, принадлежащую графику соответствия R, точкой в декартовой системе координат, получим графическое задание данного соответствия.

Так как граф соответствия S^{-1} получается из графа соответствия S изменением направления всех стрелок (см. рис. 38б), то график соответствия S^{-1} можно получить из графика соответствия S, поменяв в каждой паре местами абсциссу и ординату: {(-2, 0), (4, 0), (-2, 1), (4, 1), (-2, 5), (4, 5)}.

Найдем декартово произведение множеств X и Y: $X \times У$ = {(-3, -2), (-3, 0), (-3, 4), (0, -2), (0, 0), (0, 4), (1, -2), (1, 0), (1, 4), (5, -2), (5, 0), (5, 4)}. Уберем все пары, принадлежащие графику соответствия S. Останется график противоположного соответствия S': {(-3, -2), (-3, 0), (-3, 4), (0, 0), (1, 0), (5, 0)}. Граф противоположного соответствия S' показан на рис. 38в.

2. Найдите область определения и множество значений соответствия xSy: «$x < y$», если x и y – натуральные числа и $35 < x < 97$, $26 < y < 84$.

<u>Решение.</u> Любой $x < 82$ будет иметь полный образ, т.к. максимальное значение y равно 83, следовательно, область определения данного соответствия $D_s = \{x | x \in N,\ 36 < x \leq 82\}$. Учитывая, что минимальное значение x равно 36, определяем, что неравенство $x < y$ выполняется только для $y \geq 37$, поэтому множество значений соответствия $E_s = \{y | y \in N, 37 \leq y \leq 83\}$.

3. Найдите область определения и множество значений соответствия xSy: «$x < y^2 - 4$», если x и y – действительные числа. Задайте данное соответствие графически.

<u>Решение.</u> Сначала построим на координатной плоскости график функции $x = y^2 - 4$. Это парабола с вершиной в точке (-4, 0). Она делит плоскость на две части – одна лежит внутри параболы, а другая – вне этой параболы (см. рис. 40). Возьмем в каждой части по одной точке и проверим, выполняется ли в этой точке данное неравенство $x < y^2 - 4$. Если оно выполняется в этой точке, то оно будет выполняться и во всей части, где лежит эта точка. Проверим координаты точки A(-5, 0). Они удовлетворяют данному неравенству, а координаты точки B(3, 0) – нет. Следовательно, графиком соответствия S является множество точек, отмеченное штриховкой на рис. 21 (пунктирная линия означает, что граница множества не принадлежит графику соответствия). Установим область определения данного соответствия: $D_S = R$; множество значений $E_S = R$.

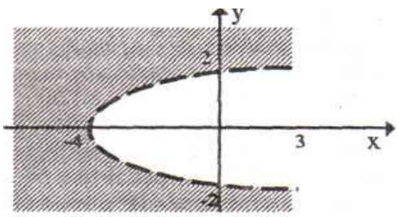


Рис. 3.13

4. Для следующих соответствий сформулируйте противоположные, и обратные соответствия: а) xTy: «Число x является корнем уравнения y»; б) xSy: «Человек x ниже человека y»; в) xTy: «Прямая x пересекает окружность y».

<u>Решение.</u> На основании определений имеем: а) $yT^{1}x$: «Уравнение y имеет корнем число x»; $xT'y$: «Число x не является корнем уравнения y»; б) $xS^{-1}y$: «Человек y не ниже человека x»; $xS'y$: «Человек x не ниже человека y»; в) $yT^{1}{}'x$: «Окружность y пересекается с прямой x»; $xT'y$: «Прямая x не пересекает окружность y».

ЭЛЕМЕНЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Понятия. Определений понятий.

1. Назовите несколько свойств, принадлежащих содержанию понятия «четырехугольник». Принадлежит ли содержанию этого понятия свойство «иметь прямой угол»?

Решение: В содержание понятия «четырехугольник» входят только те свойства, которые являются общими для всех четырехугольников, например, такие: а) имеет 4 вершины, б) имеет 4 угла, в) ограничен замкнутой ломаной линией. Свойство «иметь прямой угол» не входит в содержание понятия «четырехугольник», т.к. этим свойством обладают не все четырехугольники.

2. Выясните, является ли понятие а – «многоугольник» обобщением понятия с – «треугольник».

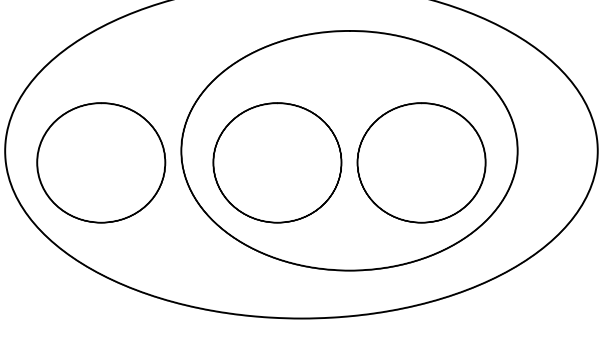
Решение: Для ответа на вопрос задачи выясним, является ли С собственным подмножеством множества A. По определению $C \subset A$, если каждый элемент множества C является элементом множества A. Т.е. высказывание «Всякий треугольник есть многоугольник» истинно, то $C \subset A$. В то же время множество многоугольников не равно множеству треугольников, т.е. $C \neq A$. Следовательно, понятие «многоугольник» является обобщением понятия «треугольник».

3. Приведите примеры понятий, которые не находятся в отношении рода и вида.

Решение: К таким понятиям можно отнести понятие а – «трапеция» и понятие b – «треугольник», т.к. $A \cap B = \varnothing$. Не пересекаются объемы понятий «число» и «логарифм», «угол» и «функция» и т.д.

4. Изобразите отношения, между объемами следующих понятий на кругах Эйлера: *a* – «натуральное число», *b* – «однозначное положительное число», *c* – «действительное число», *d* – «отрицательное число», *e* – «трехзначное положительное число».

Решение: Понятие *c* является родовым по отношению ко всем понятиям, понятие *a* является родовым по отношению к понятиям *b* и *e*. Объем понятия *d* не пересекается с объемами понятий *a*, *b*, *e*. На кругах Эйлера все эти отношения между понятиями выглядят так:



5. Сформулируйте определение биссектрисы угла. Укажите в нем определяемое и определяющее понятия; родовое понятие и видовое отличие.

Решение: Сформулируем определение биссектрисы угла: «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам».

В этом определении определяемое понятие – биссектриса угла, определяющее – луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам. Родовое понятие – «луч», а видовое отличие – свойства: «выходить из вершины угла и делить угол пополам».

2.2. Высказывания. Логические операции.

1. Укажите среди следующих предложений высказывания и укажите их истинность: а) Кама впадает в Черное море; б) $2x+3=5$; в) $2+3=6$; г) Вы любите спорт? д) $-23<0$; е) Существует $x \in \mathrm{R}$, что $3x-1=5$; ж) Принесите, пожалуйста, газету.

Решение: Предложения д), е) – истинные высказывания; предложения а), в) – ложные высказывания; предложения б), г), ж) – не являются высказываниями, т.к. нельзя определить их истинность.

2. Даны высказывания: A: «Все кошки любят поспать»; B: «Число 2007:2». Составьте из них новые высказывания.

Решение: Можно составить такие высказывания: а) $A \vee B$: «Все кошки любят поспать или число 2007:2»; б) $A \Rightarrow B$: «Если все кошки любят поспать, то число 2007:2»; в) $\overline{A}$: «Неверно, что все кошки любят поспать».

3. Среди следующих составных высказываний выделите элементарные: а) A: «$6 \in \mathrm{N}$ или $6>8$»; б) B: «Если 24:4, то 24:2»; в) C: «Данный четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две его противоположные стороны равны и параллельны».

Решение: Высказывания A, B и C составные, потому что содержат логические связки «или», «если…», «то…», «тогда и только тогда». Элементарные высказывания: а) A_1: «$6 \in \mathrm{N}$», A_2: «$6>8$»; б) B_1: «24:4», B_2: «24:2»

в) C_1: «Данный четырехугольник – параллелограмм»; C_2: «Две противоположные стороны данного четырехугольника равны и параллельны».

Высказывания $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ элементарные, т.к. не содержат логических связок.

4. Даны два высказывания A: «$2<5$» и B: «$5<10$». Образовать из них конъюнкцию.

Решение: $A \wedge B$: «$2<5$ и $5<10$». $A \wedge B$ - «И», т.к. A – «И» и B – «И» Следовательно, конъюнкцию $A \wedge B$ можно записать в виде двойного неравенства: $2<5<10$. Таким образом, двойное неравенство есть конъюнкция двух неравенств.

5. Даны два высказывания *A:* «15>2» и *B* «15=2». Образовать из них дизъюнкцию.

Решение: $A \vee B$: «15>2» или «15=2». $A \vee B$ – «И», т.к. *A*: «15>2» - «И». Следовательно, дизъюнкцию $A \vee B$ можно дописать в виде нестрогого неравенства: 15≥2. Таким образом, нестрогое неравенство есть дизъюнкция двух неравенств.

6. Посмотрите отрицания приведенных ниже высказываний. Определите значения истинности этих высказываний и их отрицаний.

а) *A*: «Число 5-делитель числа 75»;

б) *B*: «Существуют трапеции, имеющие прямой угол»;

в) *C:* «Любое действительное число *x* является корнем управления x^2-4=0 »

г) *Д*: «31:3»;

д) *E*: «-11 $\in Z_0$»

Решение: а) $\overline{A}$: «число 5 не является делителем числа 75»; *A* – «И», $\overline{A}$ – «Л»;

б) $\overline{B}$: «Все трапеции не имеют прямой угол» *B* – «И», $\overline{B}$ – «Л»;

в) $\overline{C}$: «Существует действительное число *x*, не являющееся корнем уравнения x^2-4=0», *C* – «Л», $\overline{C}$ – «И»;

г) $\overline{D}$: «$\overline{31:3}$», *D* – «Л», $\overline{D}$ – «И»;

д) $\overline{E}$*:* «-11 $\notin Z_0$», *E* – «Л», $\overline{E}$ – «И»

7. Даны высказывания: *A*: «Я люблю историю», *B*: «Я занимаюсь в математическом кружке». Сформулируйте высказывания, соответствующие следующим выражениям:

а) $\overline{A} \wedge B$; б) $A \vee \overline{B}$; в) $\overline{A \wedge B}$.

Решение:

а) $\overline{A}$: «Я не люблю историю», тогда $\overline{A} \wedge B$*:* «Я не люблю историю и занимаюсь в математическом кружке»;

б) $\overline{B}$*:* «Я не занимаюсь в математическом кружке», значит $A \vee \overline{B}$*:* «Я люблю историю или не занимаюсь в математическом кружке»;

в) $\overline{A \wedge B}$ «Неверно, что я люблю историю и занимаюсь в математическом кружке».

8. Постройте отрицание следующего высказывания *A*: «Число 35M и число 35 - составное».

Решение:

1 способ: $\overline{A}$: «Неверно, что число 35M и число 35 - составное»

2 способ: Выделим логическую структуру высказывания *A*. Высказывание *A* есть конъюнкция высказываний A_1: «Число 35M» и A_2: «35 -

составное», то есть $A = A_1 \wedge A_2$. По закону де Моргана $\overline{A_1 \wedge A_2} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2}$. Посмотрим отрицания высказываний $\overline{A}_1$: «Число $35M5$» и $\overline{A}_2$: «Число 35 не является составным». Тогда $\overline{A} = \overline{A_1} \vee \overline{A_2}$ формулируется так: «Число $\overline{35M5}$ или число 35 не является составным».

9. Является ли формула ((A⇒B)∧A) ⇒ (A⇔B) абсолютно истинной?

Решение: Построим таблицу истинности.

A	B	A⇒B	(A⇒B)∧A)	A⇔B	((A⇒B)∧A) ⇒(A⇔B)
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	И	Л	И	И

Последний столбец свидетельствует об абсолютной истинности данной формулы.

10. На множестве A={1, 2, 3, 4 … 25} заданы предикаты *A(x)*: «Число *x* делится на 3», *B(x)*: «Число *x* – нечетное», *C(x)*: «Число *x* делится на 7». Сформулируйте следующие предикаты и найдите их множества истинности:
а) $A(x) \wedge B(x)$; б) $A(x) \vee B(x)$; в) $A(x) \wedge C(x)$; г) $B(x) \vee C(x)$.

Решение:

а) $A(x) \wedge B(x)$: «Число *x* делится на 3 и нечетное»;
T_A={3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24}, T_B={1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25}.
$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$={3, 9, 15, 21}.

б) $A(x) \vee B(x)$: «Число *x* делится на 3 или нечетное»;
$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B$={1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18. 19, 21, 23, 24, 25}.

в) $A(x) \wedge C(x)$: «Число *x* делится на 3 и делится на 7». T_C ={7, 14, 21}, $T_{A \wedge C}$={21}

г) $B(x) \vee C(x)$: «Число *x* – нечетное или делится на 7». $T_{B \vee C}$={1, 3, 5. 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21. 23, 25}.

11. На множестве N заданы предикаты *A(x)*: «Число *x* - четное» и *B(x)*: «Число *x*>15». Сформируйте следующие высказывания, пользуясь обычным языком и укажите среди них истинные:

а) $(\forall x \in N)A(x)$; б) $(\exists x \in N)B(x)$; в) $(\exists x \in N)A(x)$.

Решение: Приведенные высказывания читаются так: а) «Любое натуральное число *x* - четное» или «Все натуральные числа - четные». Это высказывания ложное, т.к. существует *x* = 17, что *A*(17) – «Л»;

б) «Существует натуральное число *x* больше 15». Это высказывание истинно, т.к. существует *x* = 20, что *B*(20) – «И»;

в) «Существуют натуральные четные числа». Это высказывание истинно, т.к. существует *x* = 8, что *A*(8) – «И».

12. Даны предикаты $A(x)$: «$x+2<0$» и $B(x)$: «$2x-1<5$», $x\in$R.

1) Определите множество истинности предикатов:

а) $A(x)\vee B(x)$; б) $A(x)\wedge B(x)$; в) $A(x)\Rightarrow B(x)$; г) $A(x)\Leftrightarrow B(x)$; и изобразите их на диаграммах Эйлера-Венна.

2) Укажите, какой из предикатов логически следует из другого.

3) Разными способами сформулируйте импликацию предикатов, используя термины «необходимое условие», «достаточное условие».

<u>Решение:</u> 1) $A(x)$: «$x+2<0$», $x\in$R;

$B(x)$: «$2x-1<5$», $x\in$R.

Найдем множества истинности данных предикатов: $T_A=\{x \mid x\in R,\ x<-2\}$;

$T_B=\{x \mid x\in R,\ x<3\}$.

Определим множества истинности составных предикатов:

$T_{A\vee B}=T_A\cup T_B$, $T_{A\vee B}=\{x \mid x\in R,\ x<3\}$

$T_{A\wedge B}=T_A\cap T_B$, $T_{A\wedge B}=\{x \mid x\in R,\ x<-2\}$.

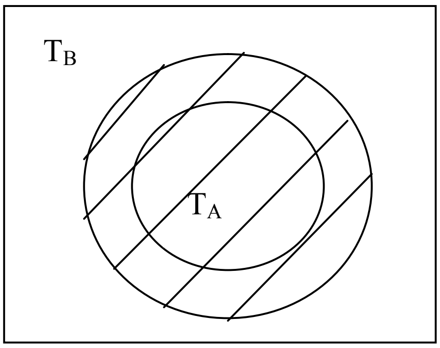
$T_{A\Rightarrow B}=T'_A\cup T_B$, $T'_A=\{x \mid x\in R,\ x\geq -2\}$, тогда $T_{A\Rightarrow B}=\{x \mid x\in R,\ x\geq -2$ или $x<3\}$.

$T_{A\Leftrightarrow B}=(T'_A\cup T_B)\cap(T'_B\cup T_A)$.

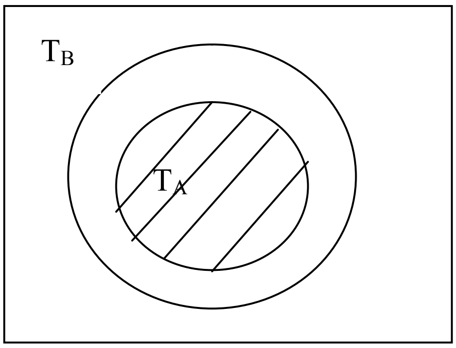
$T'_B=\{x \mid x\in R,\ x\geq 3\}$, тогда $T_{A\Leftrightarrow B}=\{x \mid x\in R,\ x\geq 3$ или $x<-2\}$.

Множества истинности данных предикатов показаны на рис. 5.

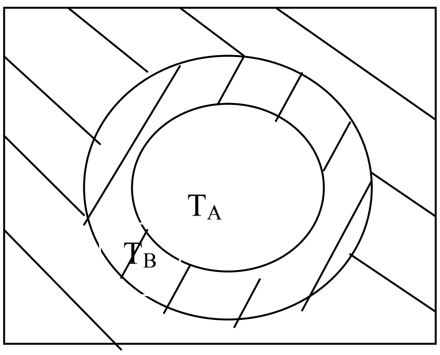
а) $T_{A\vee B}$



б) $T_{A\wedge B}$



в) $T_{A\Rightarrow B}$



г) $T_{A\Leftrightarrow B}$

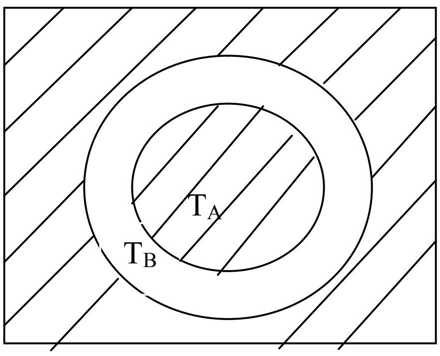


Рис.5

Установим, в какие отношения вступили T_A и T_B. Если $x \in T_A$, то $x \in T_B$ для $\forall x \in T_A$.

Но если x=1, $1 \notin T_A$, то $1 \in T_B$, следовательно $T_A \subset T_B$ и, значит, истинно высказывание $(\forall x \in R)(A(x) \Rightarrow B(x))$, т.е. $(\forall x \in R)(x+2 \forall x \in R)<0 \Rightarrow 2x-1<5)$. Это значит, что из предиката *A(x)* логически следует *B(x)*, и предикат *A(x)*- достаточное условие для *B(x)*, а *B(x)* – необходимое условие для *A(x)*.
1)сформулируем данную импликацию предикатов, используя термины «необходимое условие», «достаточное условие»: «Для того чтобы выполнялось x+2<0, необходимо, чтобы выполнялось 2x-1<5». «Для того чтобы выполнялось 2x-1<5, достаточно, чтобы выполнялось x+2<0».

13. Упростить формулу: $x = \left(\overline{\overline{A} \wedge C}\right) \vee \left(B \wedge \overline{C}\right)$.

Решение: $x = \left(\overline{\overline{A} \wedge C}\right) \vee \left(B \wedge \overline{C}\right) =$
$= \left(A \vee \overline{C}\right) \vee \left(B \wedge \overline{C}\right) = A \vee \left(\overline{C} \vee B \wedge \overline{C}\right) = A \vee \left(\overline{C} \wedge И \vee B \wedge \overline{C}\right) = A \vee \overline{C} \wedge И = A \vee \overline{C}$.

2.3. Теоремы. Виды теорем.

1. Выделить условие и заключение в теореме «Для того чтобы две прямые были параллельны, достаточно, чтобы они были центрально-симметричны».

Решение: Прежде всего выясним, к какому предложению относится слово «достаточно». Оно и будет условием теоремы. В данной теореме слово «достаточно» относится к предложению «Прямые центрально-симметричны», следовательно, это и будет условие теоремы. Тогда заключением будет предложение «Прямые параллельны». Таким образом, данную теорему можно сформулировать и так: «Если прямые центрально-симметричны, то они параллельны».

2. Вместо многоточия вставить термины «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»: «Для того, чтобы число *x* являлось делителем числа 15, …, чтобы число *x* являлось делителем числа 5».

Решение: Пусть *C(x)*: «число *x* – делитель числа 5». Для ответа на вопрос задачи нужно выяснить, каким условием («необходимым», «достаточным» или «необходимым и достаточным») является предикат *C(x)* для предиката *D(x)*.

Для проверки достаточности предиката *C(x)* выясним, находятся ли

C(x) и *D(x)* в отношении следования. Так как T_C ={1, 5}, а T_D={1, 3, 5, 15}, то

$T_C \subset T_D$ и, следовательно, $C(x) \Rightarrow D(x)$. Истинность последнего высказывания означает, что $C(x)$ является достаточным условием для $D(x)$.

Проверим, является ли $C(x)$ необходимым условием для $D(x)$, выяснив, истинно ли высказывание $D(x) \Rightarrow C(x)$.

Так как найдется такое значение x (например, x=3), при котором $D(x)$ – «И», а $C(x)$ – «Л», то высказывание $D(x) \Rightarrow C(x)$ – ложно и, следовательно, $C(x)$ не является необходимым условием для $D(x)$.

Таким образом, вместо многоточия можно вставить только термин «достаточно»: «Для того чтобы число x являлось делителем числа 15, достаточно, чтобы число x являлось делителем числа 5».

3. Дана теорема: «Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то четырехугольник – параллелограмм». Сформулировать теоремы, являющиеся обратной и противоположной данной.

Решение: Выделим условие и заключение данной теоремы. Условие: «В четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны».
Заключение: «Четырехугольник – параллелограмм».

4. Дана теорема: «Для того чтобы диагонали четырехугольника делились в точке пересечения пополам, достаточно, чтобы этот четырехугольник был параллелограммом».

а) Сформулируйте данную теорему при помощи слов «следует», «любой», «необходимо»;

б) Сформулируйте теорему, равносильную данной, используя закон контрапозиции.

Решение: а) Для ответа на вопрос задачи удобно ввести обозначения: пусть $A(x)$: «Четырехугольник x – параллелограмм», $B(x)$: «В четырехугольнике x диагонали в точке пересечения делятся пополам». В данной теореме утверждается, что $A(x)$ - достаточное условие для $B(x)$, а это по определению означает, что истинно высказывание $A(x) \Rightarrow B(x)$. Его можно прочитать различными способами. Например, «Из $A(x)$ следует $B(x)$», «Всякое $A(x)$ есть $B(x)$», «$B(x)$ есть необходимое условие для $A(x)$».

Таким образом, на основании вышеизложенных утверждений получаем следующие формулировки данной теоремы:

1. Из того, что четырехугольник - параллелограмм следует, что его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

2. Во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам.

3. Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы диагонали этого четырехугольника делились в точке пересечения пополам.

б) На основании закона контрапозиции теорема вида $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$ равносильна теореме $(\forall x \in X) \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$. Таким образом, получаем следующую формулировку: «Если в четырехугольнике диагонали не делятся в точке пересечения пополам, то этот четырехугольник не является параллелограммом».

5. Дана теорема: «Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, …, чтобы он был параллелограммом». Вместо многоточия вставьте слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание. Затем сформулируйте теорему, используя слова «если..., то...». Составьте по данной импликации еще три теоремы (обратную, противоположную данной и обратную противоположной) и определите их истинность.

Решение. Выделим части этой теоремы. Пусть X – множество четырехугольников плоскости; x – четырехугольник плоскости; $A(x)$: «Четырехугольник x – прямоугольник» и $B(x)$: «Четырехугольник x – параллелограмм» – предикаты, заданные на множестве X. Видим, что $T_A \subset T_B$, следовательно, $A(x)$ – достаточное условие для $B(x)$, а $B(x)$ - необходимое условие для $A(x)$, т.е. верна теорема $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$, которую можно сформулировать так: «Для того чтобы четырехугольник x был прямоугольником, необходимо, чтобы он был параллелограммом» или «Для того чтобы четырехугольник x был параллелограммом, достаточно, чтобы он был прямоугольником».

С данной теоремой $(\forall x \in X) A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если четырехугольник x прямоугольник, то он параллелограмм», которая верна, связаны еще три теоремы:

1) $(\forall x \in X) B(x) \Rightarrow A(x)$ – обратная данной;

2) $(\forall x \in X)\ \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ – противоположная данной;

3) $(\forall x \in X)\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ – противоположная обратной.

1) «Если четырехугольник x – параллелограмм, то он является прямоугольником».

2) «Если четырехугольник x не прямоугольник, то он не параллелограмм».

3) «Если четырехугольник x не параллелограмм, то он не прямоугольник».

Так как данная теорема – верна, то по закону контрапозиции теорема 3 тоже верна. Теорема 1 – неверна, так как существуют параллелограммы, которые не являются прямоугольниками. Тогда, в силу закона контрапозиции, и теорема 2 будет неверной.

2.4. Умозаключения

1. Верно предложение: «Существует правильный многоугольник с любым наперед заданным числом сторон $n \geq 3$». Сформулируйте аналогичное предложение для правильного многогранника. Верно ли оно?

Решение. Предложение по аналогии можно сформулировать так: «Существует правильный многогранник с любым наперед заданным числом граней $n \geq 4$», т.к. тетраэдр - это правильный многогранник с наименьшим (n=4) числом граней. Очевидно, что это предложение не верно, потому что не существуют, например, правильные пятигранники и семигранники. Правильный шестигранник существует - это куб.

2. Является ли дедуктивным (правильным) следующее умозаключение: «Если сумма цифр числа делится на 9, то это число делится на 9. Сумма цифр числа 1098 делится на 9. Следовательно, число 1098 делится на 9»?

Решение. Введем обозначения: $A(x)$: «Сумма цифр числа x делится на 9», $B(x)$: «Число x делится на 9». Тогда первую посылку можно записать так: $A(x) \Rightarrow B(x)$, вторую – A(1098), а заключение – B(1098). Таким образом, схема данного умозаключения такова: $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), A(1098)}{B(1098)}$. Она построена по правилу заключения. Следовательно, данное умозаключение является дедуктивным.

3. Является ли данное рассуждение дедуктивным: «Все числа, делящиеся на 9, делятся на 3. Число 156 не делится на 9. Значит, число 156 не делится на 3».

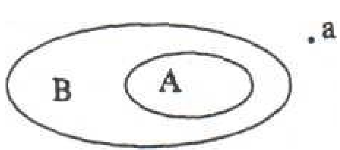
Решение. Обе посылки в данном умозаключении истинны, а заключение ложно. А это означает, что между ними (посылками и заключениями) нет отношения логического следования. Поэтому умозаключение не является дедуктивным.

4. Является ли данное рассуждение дедуктивным: «Если студент сдал экзамен, то он сдал и зачет. Студент Петров не сдал экзамен. Следовательно, студент Петров не сдал и зачет».

Решение. Введем обозначения: $A(x)$: «Студент x сдал экзамен», $B(x)$: «Студент x сдал зачет». Тогда первую посылку можно записать так: $A(x) \Rightarrow B(x)$, вторую – A(Петров), а заключение – B(Петров). Значит, схема данного рассуждения такова: $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{A(\textit{Петров})}}{\overline{B(\textit{Петров})}}$. Данная схема не гарантирует истинности заключения: с ее помощью можно получать как истинные, так и ложные заключения. Например, студент может сдать зачет, но не сдать экзамен.

5. Проверьте правильность данного умозаключения с помощью диаграмм Эйлера-Венна: «Все существительные отвечают на вопрос «Кто?» или «Что?». Слово «учебный» не отвечает ни на один из этих вопросов. Следовательно «учебный» не является существительным».

Решение. Обозначим через A множество существительных, а через B множество слов, отвечающих на вопрос «Кто?» или «Что?». Тогда



умозаключение можно записать в виде: $\dfrac{A \subset B, a \notin B}{a \notin A}$. Изобразив посылки с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 7), видим, что в этом случае $a \notin A$, то есть заключение тоже истинно. Значит умозаключение построено правильно.

Рис.7

6. Докажите методом полной индукции, что при любом простом двузначном числе р выражение p^2-1 делится на 24.

Решение: имеется 21 простое двузначное число: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Последовательно подставив эти числа в данное выражение, убедимся, что выражение p^2-1 делится на 24. В самом деле, $11\cdot 11-1=120$; $120 \vdots 24$; $17\cdot 17-1= 288$; $288 \vdots 24$;…, $97\cdot 97-1= 9408$; $9408 \vdots 24$.

7. Докажите, что если натуральное число n не кратно 3, то число n^2+2 кратно 3.

Решение: доказательство проведем методом полной индукции. Числа, не кратные 3, можно разбить на 2 класса: класс натуральных чисел, имеющих при делении на 3 остаток 1, и класс натуральных чисел, имеющих при делении на 3 остаток 2, т. е. $N_1=\{n|n= 3k+1,\ k\in Z_0\}$, $N_2=\{n|n= 3k+2,\ k \in Z_0\}$. Докажем, что для любого числа n из каждого класса n^2+2 делится на 3.

1. Пусть $n=3k+1$. Тогда $n^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+1+2=3(3k^2+2k+1)$. Следовательно, по теореме о делимости произведения $(n^2+2) \vdots 3$.
2. Пусть $n=3k+2$. Тогда $n^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+4+2=3(3k^2+4k+2)$. Следовательно, по теореме о делимости произведения $(n^2+2) \vdots 3$, т.к. $3 \vdots 3$.

Таким образом, доказали, что для всех натуральных чисел не кратных 3, выражение $(n^2+2) \vdots 3$.

8. Докажем методом от противного теорему «Произведение нечетных целых чисел есть число нечетное».

Доказательство. Предположим противное, пусть произведение нечетных чисел есть число четное. Значит, это произведение делится на два, а это может быть только в том случае, когда один из множителей является четным числом. Однако по условию у нас все множители являются нечетными числами. Получено отрицание условия теоремы. На основании метода доказательства от противного заключаем, что данная теорема верна.

9. «Докажем, что $2 \cdot 2=5$. Имеем верное числовое равенство: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части его общий множитель. Получим: $4(1:1)=5(1:1)$. Числа в скобках равны, поэтому $4=5$ или $2 \cdot 2=5$.

Решение: ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества $4 : 4 = 5 : 5$.

2.5.Логические задачи. Способы решения логических задач.

1. Имеем три множества орехов: 11, 7, 6 штук. Требуется переложить орехи так, чтобы в каждой кучке их стало поровну, при этом добавлять в кучку можно лишь столько орехов, сколько их там уже есть.

Решение. (11,7,6) – начальное состояние, (8,8,8) – целевое состояние.

Требуется перейти от начального состояния к целевому, выполняя требование задачи: в кучку можно добавлять столько орехов, сколько их там уже было. Этот переход осуществим, используя граф-дерево. Первоначально возможно получить три новые вершины графа:

(11, 7, 6)

(4, 14, 6)   (5, 7, 12)   (11, 1, 12)

Далее раскрываем эти вершины, стараясь при этом избегать повторения. Если повторения неизбежны, то прекращаем их раскрытие. При этом вершины, отличающиеся порядком элементов в них, считаем одинаковыми. Наиболее перспективно раскрывать вершину (4, 14, 6), т.к. во всех этих кучках четное число орехов (так же, как и в целевой вершине). Затем целесообразно раскрывать вершину (4, 8, 12), т.к. число орехов в кучках кратно 4.

(11, 7, 6)

(4, 14, 6)   (5, 7, 12)   (11, 1, 12)

(8, 10, 6)   (4, 8, 12)   (8, 14, 2)

(8, 8, 8)

Замечание. Заключение задачи можно усилить: какое минимальное число перекладываний понадобится? Чтобы ответить на этот вопрос, следует раскрыть другие вершины и выбрать минимальное число ходов. В данной задаче минимально три перекладывания.

2. Двенадцатилитровый бидон наполнен молоком. Необходимо разлить молоко на две равные части, пользуясь восьмилитровым и пятилитровым бидонами.

Решение. Занумеруем три имещихся бидона: 1-12л, 2-8л, 3-5л.

Начальное состояние – (12,0,0).

Целевое состояние – (6,6,0).

Число 6 представимо в виде суммы 1+5. К целевому состоянию мы придем, если получим вершину (1,6,5) (или вершину (6,5,1)). Поэтому наиболее перспективной будем считать вершину, в которой первый элемент ближе к I.

(12, 0, 0)

(4, 8, 0) (7, 0, 5)

(4, 3, 5) (0, 8, 4) (0, 7, 5) (7, 5, 0)

(9, 3, 0) (8, 0, 4) (5, 7, 0) (2, 5, 5)

(9, 0, 3) (8, 4, 0) (5, 2, 5) (2, 8, 2)

(1, 8, 3) (3, 4, 5) (10, 2, 0) (10, 0, 2)

(1, 6, 5) (3, 8, 1) Цикл (10, 2, 0) (12, 0, 2)

(6, 6, 0) (11, 0, 1) Начальное состояние

(11, 1, 0) Раскрывать эти вершины бесперспективно

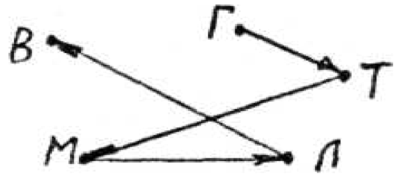
(6, 1, 5)

(6, 6, 0)

Минимальное число переливаний равно семи

3. Из лагеря вышли пять туристов: Вася, Галя, Толя, Лена, Маша. Толя идет впереди Маши, Лена – впереди Васи, но позади Маши, Галя - впереди Толи. Кто идет первым и кто последним?

<u>Решение.</u> Будем рассуждать: «*x* впереди *y*». Строим ориентированный граф задачи. «Читаем» граф, двигаясь по пути ГТ, ТМ, МЛ, ЛВ, и заключаем, что первой идет Галя, а последним – Вася.



4. Леня, Женя и Миша имеют фамилии Орлов, Соколов и Ястребов. Какую фамилию имеет каждый мальчик, если Женя, Миша и Соколов – члены математического кружка, а Миша и Ястребов занимаются музыкой.

<u>Решение.</u>

Л	О	Леня Соколов,
Ж	С	Женя Ястребов,
М	Я	Миша Орлов.

5. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке – не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Куда налита каждая жидкость?

Решение.

Бутылка Стакан Кувшин Банка

Молоко Лимонад Квас Вода

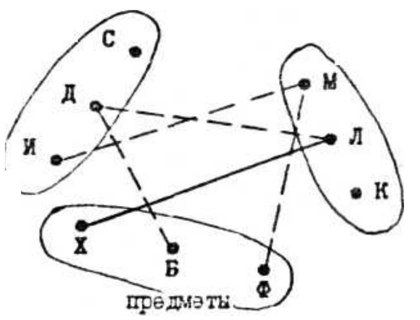
Ответ: кувшин – молоко, бутылка – лимонад, стакан – вода, банка – квас.

6. Три товарища – Иван, Дмитрий и Степан – преподают различные предметы (химию, биологию, физику) в школах Москвы, Липецка и Киева. Известно, что: I) Иван работает не в Москве, а Дмитрий – не в Липецке; 2) москвич преподает не физику; 3) тот, кто работает в Липецке, преподает химию; 4) Дмитрий преподает не биологию. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из товарищей?

Решение.

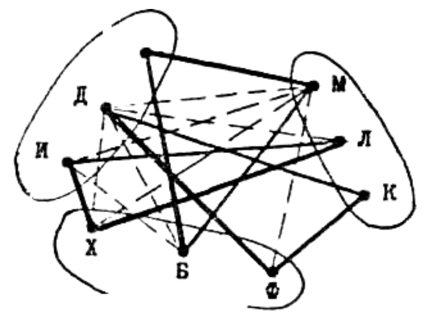
Граф условия задачи:

Имена Города



Граф решения задачи:

Имена Города



Предметы

Согласно условия задачи ребра ИМ, ФМ, ДЛ – штриховые, а ребро ХЛ – сплошное. Так как ХЛ – сплошное ребро, то ХМ – штриховое. Так как МХ и МФ – штриховые ребра, то МБ должно быть сплошным. Остается, что ФК – сплошное ребро.

Теперь сформулируем два правила, присущие графам такого рода.

Правило I. Если у треугольника с вершинами в трех разных множествах одна сторона сплошная, а вторая – штриховая, то и третья сторона должна быть штриховой.

Правило 2. Если в треугольнике с вершинами в трех разных множествах две стороны сплошные, то и третья сторона должна быть сплошной.

На основании правила I из ΔИБМ утверждаем, что ребро БИ должно быть штриховым, тогда ребро БС должно быть сплошным. Из ΔДБМ утверждаем, что ДМ – штриховое робро, значит, МС – сплошное (правило 2). Из ΔХЛД ребро ХД – штриховое (правило I), тогда ребро ХИ – сплошное, ребро ИЛ – также сплошное (правило 2). Остается построить сплошной треугольник ФКД.

На языке графов задача свелась к построению трех треугольников со сплошными ребрами и вершинами в точках разных множеств. Вершины сплошных треугольников ДФК, ЛХИ и СМБ дают ответ на вопрос задачи: Степан преподает биологию в Москве, Иван преподает химию в Липецке, Дмитрия преподает физику в Киеве.

7. Электрик, монтажник и инженер, фамилии которых Бауманн, Эйхлер и Хаан, летели рейсом из Праги в Каир. Из разговора, который они вели в самолете, выяснилось, что:

1. Бауманн и инженер собирались работать на строительстве;
2. Электрик и Хаан живут постоянно в Берлине;
3. Эйхлер моложе, чем монтажник;
4. Хаан старше, чем инженер.

Назовите фамилии инженера и электрика.

Решение. Составим таблицу из трех строк и трех столбцов (три фамилии и три профессии). Такую таблицу называют матрицей размером 3×3 (три на три). Добавим еще одну строку и один столбец для указания фамилий и профессий. В итоге получим матрицу (рис.15).

	Б	*Э*	*Х*
э			
м			
и			

Рис.15

Составим матрицу условия задачи (рис. 16).

	Б	*Э*	*Х*
э			
м			
и			

Рис.16

Из условия I следует, что Бауманн не инженер, то есть элемент *Би* несовместен. Заштрихуем клеточку *Би*. Из условия 2 следует, что несовместен элемент *Хэ*, что позволяет заштриховать соотвествупщув клеточку. На основании условия 3 заштриховываем клеточку *Эм*, на основании условия 4 – клеточку *Хи*.

Теперь составим матрицу решения задачи (рис. 17). Глядя на столбец *Х*, делаем вывод, что Хаан – монтажник, откуда следует, что *Бм* – несовместный элемент (штриховка).

	Б	*Э*	*Х*
э	+		
м			+
и		+	

Рис.17

Тогда вертикаль *Б* «говорит», что Бауман – электрик, а строка *и* «говорит», что инженер – Эйхлер.

Матрица может содержать m строк и n столбцов, т.е. быть размером $m\times n$.

8. Разбирается дело Джонса, Брауна и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления.

Джонс: Браун не делал этого.
Смит сделал это.

Браун: Я не делал этого.
Джонс не делал этого.

Смит: Я не делал этого.
Браун сделал это.

Было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий – раз солгал, раз сказал правду. Кто совершил преступление?

Решение. Нас интересует ситуация ЛЛ, ИИ, ЛИ (в любом порядке).

Предположим, что преступник Джонс. Тогда показания Джонса, Брауна и Смита соответственно есть ИЛ, ИЛ, ИЛ, что не удовлетворяет интересующей нас ситуации. Результаты дальнейших рассуждений сведем в таблицу.

	Джонс	Браун	Смит	Вывод
Джонс	ИЛ	ИЛ	ИЛ	Не удовлетворяет условию задачи
Браун	ЛЛ	ЛИ	ИИ	Удовлетворяет условию задачи
Смит				

Замечания.

1. Заполнять третью строку таблицы нет необходимости, т.к. в задаче сказано, что преступник один, а вторая строка таблицы «говорит», что преступник – Браун.

2. Если изменить условие задачи, убрав фразу «Один из них совершил преступление», то необходимо заполнить таблицу полностью и ответить на вопрос задачи.